VI.- SEMEJANZA HIDRODINÁMICA
Y ANÁLISIS DIMENSIONAL

pfernandezdiez.es

VI.1.- NÚMEROS DE FROUDE, REYNOLDS, WEBER Y MACH

En un fenómeno hidráulico, las *variables* que intervienen en el mismo se pueden reducir a ocho, y son:

a) La fuerza F
b) La longitud L
c) La velocidad u
d) La densidad ρ
e) La viscosidad dinámica η
f) La aceleración de la gravedad g
g) La velocidad del sonido c_s
h) La tensión superficial s

Las *fuerzas* que pueden actuar sobre un fenómeno hidráulico, son:

1) Las de inercia (gradiente de presiones)
2) Las de peso (gravedad)
3) Las de viscosidad (rozamiento)
4) Las de capilaridad (tensión superficial)
5) Las de elasticidad.

La comparación de las cuatro últimas respecto a la primera, permite determinar los números adimensionales de Froude, Reynolds, Weber y Mach.

El nº de Froude se define en la forma:

$$F = \sqrt{\frac{\dfrac{Fuerzas\ de\ inercia}{Volumen}}{\dfrac{Fuerzas\ de\ peso}{Volumen}}} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{Fuerzas\ de\ inercia}{Volumen} = \dfrac{m\ \dfrac{du}{dt}}{V} = \rho\ \dfrac{du}{dt} = \rho\ \dfrac{du}{dL}\ \dfrac{dL}{dt} = \rho\ \dfrac{du}{dL}\ u = \rho\ \dfrac{u^2}{L} \\ \dfrac{Fuerzas\ de\ gravedad}{Volumen} = \dfrac{P}{V} = \gamma = \rho\, g \end{array} \right| = \frac{u}{\sqrt{L\, g}}$$

El nº de Reynolds se define en la forma:

$$Re = \frac{\dfrac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Volumen}}}{\dfrac{\text{Fuerzas de rozamiento}}{\text{Volumen}}} = \left| \frac{\text{Fuerzas de rozamiento}}{\text{Volumen}} = \frac{\eta\, \Omega\, \dfrac{du}{dx}}{V} = \eta\, \frac{1}{L}\, \frac{du}{dx} = \frac{u\, \eta}{L^2} \right| = \frac{\rho\, u^2 / L}{u\, \eta\, / L^2} = \frac{\rho\, u\, L}{\eta} = \frac{u\, L}{\nu}$$

Cuando el número de Reynolds es grande, las fuerzas de inercia predominan sobre las de rozamiento y si es bajo, sucede todo lo contrario.

El nº de Weber se define en la forma:

$$W = \sqrt{\frac{\dfrac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Volumen}}}{\dfrac{\text{Fuerzas de tensión superficial}}{\text{Volumen}}}} = \left| \frac{\text{Fuerzas de tensión superficial}}{\text{Volumen}} = \frac{F}{V} = \frac{F}{L^3} = \frac{\dfrac{F}{L}}{L^2} = \frac{\sigma}{L^2} \right| = \sqrt{\frac{\rho\, L}{\sigma}}\, u = \frac{u}{\sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho\, L}}}$$

en la que σ es la tensión superficial.

El nº de Mach se define en la forma:

$$M = \sqrt{\frac{\dfrac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Volumen}}}{\dfrac{\text{Fuerzas elásticas}}{\text{Volumen}}}} = \left| \frac{\text{Fuerzas elásticas}}{\text{Volumen}} = \frac{F}{V} = \frac{F}{L^3} = \frac{\dfrac{F}{L^2}}{L} = \frac{E}{L} \right| = \frac{u}{\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}} = \frac{u}{c_s}$$

en la que E es el módulo de elasticidad.

Si el número de Mach es grande predominan las fuerzas de inercia sobre las elásticas, y al contrario, si es bajo.

La velocidad del fluido $\vec{u}$ lleva asociada una velocidad de onda (*velocidad del sonido en el fluido), que se conoce como celeridad:*

- La celeridad de la onda de peso se define en la forma: $a = \sqrt{L\, g} = \sqrt{\dfrac{L\, \gamma}{\rho}}$

- La celeridad de la onda capilar se define como: $a = \sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho\, L}}$

- La celeridad de la onda elástica se define como: $a = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$

Si hacemos, $F = 1,\ W = 1,\ M = 1$, se tiene el caso en que la velocidad del fluido coincide con la celeridad de la onda, lo cual sirve para separar los régimenes cuya característica es la posibilidad de propagación de la onda en todas direcciones, o solo dentro de una porción limitada de fluido; esta velocidad se denomina *velocidad crítica.*

No se puede tratar al número de Reynolds en la misma forma debido que la propagación de la onda de viscosidad es transversal; experimentalmente se determina el valor del número de Reynolds, que separa el régimen laminar del turbulento, pudiéndose asegurar que *para fluidos que circulan por el interior de una tubería*:

- Si $Re < 2.000$, el régimen es laminar

- Por encima de $Re > 8.000$, el régimen es turbulento, aunque se han conseguido regímenes laminares por encima de este número, lo cual no es significativo a la hora de definir el régimen turbulento

Para la *celeridad de la onda de gravedad en ríos*:

- Si la velocidad u es menor que la celeridad, F < 1, el movimiento del líquido en el río será fluvial o lento

- Si la velocidad u es mayor que la celeridad a, el movimiento es torrencial o rápido

Para la *velocidad de la onda elástica*, la velocidad crítica se corresponde con la velocidad $\vec{c}_s$ del sonido, M = 1:

- Si la velocidad del fluido $u < c_s$*, el movimiento es subsónico y la perturbación se transmite en todas direcciones, remontando incluso la corriente*

- Si la velocidad $u > c_s$ *el movimiento es supersónico y la perturbación sólo se propaga en la dirección de la corriente*

VI.2.- LEY GENERAL DE NEWTON

La información obtenida cuando se ensaya un pequeño modelo, sirve para el diseño de un prototipo más grande, a escala real. Las fuerzas de inercia tienen gran interés, por cuanto aparecen en los números adimensionales de Froude, Reynolds, Weber y Mach, y de ahí el que sea preciso establecer una escala que ligue dichas fuerzas, entre el prototipo y el modelo.

Si se representa dicha escala por x, tendremos:

$$x = \frac{F}{F_m} = \frac{M\,a}{M_m a_m} = \left|\begin{matrix} M = V\,\rho = L^3\,\rho \\ M_m = V_m\,\rho_m = L_m^3\,\rho_m \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad a = \frac{u^2}{L}\,\Bigg| = \frac{\rho\,L^2\,u^2}{\rho_m\,L_m^2\,u_m^2} = \frac{\rho\,\Omega\,u^2}{\rho_m\,\Omega_m u_m^2}$$

es decir, *dos fuerzas homólogas cualesquiera están relacionadas entre sí en la misma forma que:*

- Las densidades de las masas respectivas

- Las secciones o superficies correspondientes

- Los cuadrados de las velocidades homólogas

Existen unos coeficientes, λ, μ, τ, que son relaciones constantes entre las magnitudes simples de ambos sistemas, de la forma:

$$\lambda = \frac{L}{L_m} \quad ; \quad \lambda^2 = \frac{\Omega}{\Omega_m} \quad ; \quad \lambda^3 = \frac{V}{V_m} \quad ; \quad \mu = \frac{M}{M_m} \quad ; \quad \tau = \frac{t}{t_m}$$

con los que se obtiene:

$$x = \frac{M\,a}{M_m a_m} = \frac{M}{M_m}\,\frac{\dfrac{L}{t^2}}{\dfrac{L_m}{t_m^2}} = \mu\,\lambda\,\tau^{-2}$$

que es la ecuación general de Newton, y que se aplica cuando las fuerzas de inercia predominen sobre las demás, caso que se presenta en alas de aeroplano, palas de hélice, etc, cuyas superficies provocan unas fuerzas acelerativas en el fluido en el que están inmersas, muy importantes.

Como es muy difícil conseguir una semejanza completa entre el prototipo y el modelo, en ingeniería suelen utilizarse tipos particulares de semejanza, siendo las más comunes la geométrica, la cinemática y la dinámica.

La semejanza geométrica se refiere a la dimensión longitud L y hay que asegurarse que se cumple, antes de proceder a los ensayos con cualquier modelo; una definición de este tipo de semejanza podría ser la siguiente:

Un modelo y un prototipo son geométricamente semejantes si, y solo si todas las dimensiones espaciales en las tres coordenadas tienen la misma relación de escala lineal

En la semejanza geométrica se conservan todos los ángulos, todas las direcciones de flujo, y la orientación del modelo y del prototipo con respecto a los objetos de los alrededores debe ser idéntica en la simulación.

La semejanza cinemática exige que todas las relaciones entre longitudes homologas del modelo y del prototipo tengan el mismo valor, (escala de longitudes), y también que todas las relaciones entre tiempos homólogos tengan un valor común, (escala de tiempos); en consecuencia habrá una escala única de velocidades.

Así se puede decir que:

Los movimientos de dos sistemas son cinematicamente semejantes si partículas homólogas alcanzan puntos homólogos en instantes homólogos.

La equivalencia de las escalas de longitud implica simplemente una semejanza geométrica, pero la equivalencia de las escalas de tiempo pueden exigir consideraciones de tipo dinámico tales, como la igualdad de los números de Reynolds y Mach

La semejanza dinámica exige que, cuando el modelo y el prototipo tienen la misma relación de escala de longitudes, la misma relación de escala de tiempos y la misma relación de escala de fuerzas (o de masa), el modelo es dinamicamente semejante al prototipo, y los números de Froude, Reynolds, Weber y Mach, han de ser iguales en el modelo y en el prototipo.

Veamos qué consideraciones hay que tener presentes en lo que respecta a la rugosidad. Sabemos que la fuerza total que se ejerce sobre un cuerpo en movimiento en el seno de un fluido es proporcional a la densidad del fluido, al cuadrado de la velocidad y a la superficie, por lo que teniendo en cuenta modelo y prototipo se tiene:

$$f_r = \xi\,\rho\,u^2\,\Omega \quad ; \quad f_{rm} = \xi_m\,\rho_m\,u_m^2\,\Omega_m$$

siendo ξ y ξ_m coeficientes de rozamiento; el valor de x será:

$$x = \frac{f_r}{f_m} = \frac{\xi\,\rho\,u^2\,\Omega}{\xi_m\,\rho_m\,u_m^2\,\Omega_m} = \frac{\xi}{\xi_m}\,\mu\,\lambda^{-3}\,\lambda^2\,\lambda^2\,\tau^{-2} = \frac{\xi}{\xi_m}\,\mu\,\lambda\,\tau^{-2}$$

por lo que se debe cumplir que $\xi = \xi_m$, lo que sucede cuando las rugosidades relativas de los dos sistemas sean iguales, es decir:

$$\frac{d}{L} = \frac{d_m}{L_m} \quad ; \quad \frac{d}{d_m} = \frac{L}{L_m} = \lambda$$

siendo d y d_m el espesor de las rugosidades.

De ésto se deduce que, por ejemplo, si el prototipo tiene las superficies pulimentadas, las del modelo deberán tener un pulimento especial, de forma que sus rugosidades $d_m = \dfrac{d}{\lambda}$ tienen que ser mucho más pequeñas que las del prototipo, y conseguir ésto, en muchos casos es técnicamente imposible, por lo que las fuerzas de rozamiento producidas en el modelo serán mayores que en el prototipo.

NUMERO DE EULER..- Se define en la forma:

$$E = \sqrt{\frac{\dfrac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Volumen}}}{\dfrac{\text{Fuerzas de presión}}{\text{Volumen}}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\,\rho\,u^2}{\Delta p}} = \frac{u}{\sqrt{2\,\dfrac{\Delta p}{\rho}}}$$

en la que Δp es la variación de la presión.

El estudio de un fenómeno físico consistirá, generalmente, en la investigación experimental de la función:

$$E = \phi(F, Re, W, M, \frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{a}{d})$$

en la que $\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{a}{d}$ son números que relacionan magnitudes de tipo geométrico que caracterizan el fenómeno.

Despejando la velocidad se tiene:

$$u = E\,\sqrt{\frac{2\,\Delta p}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\,\Delta p}{\rho}}\;\phi(F, Re, W, M, \frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{a}{d})$$

estableciéndose una proporcionalidad entre la velocidad u, y la variación de presión Δp.

Para fluidos perfectos, únicamente intervendrán en la función ϕ los parámetros que caracterizan el contorno.

Si representamos la ecuación anterior para el movimiento del fluido que simule el comportamiento de un modelo, se puede poner:

$$u = \sqrt{\frac{2\,\Delta p_m}{\rho_m}}\;\phi_m(F, Re, W, M, \frac{a_m}{b_m}, \frac{a_m}{c_m}, \frac{a_m}{d_m})$$

Elevando al cuadrado las expresiones de la velocidad en el modelo y en el prototipo:

$$u^2 = 2\,\frac{\Delta p}{\rho}\,\phi^2 \quad ; \quad u^2 = 2\,\frac{\Delta p_m}{\rho_m}\,\phi_m^2$$

dividiéndolas entre sí:

$$(\frac{u}{u_m})^2 = \frac{2\,\Delta p\,\rho^{-1}}{2\,\Delta p_m\,\rho_m^{-1}}\,(\frac{\phi}{\phi_m})^2 \quad \Rightarrow \quad (\lambda\,\tau^{-1})^2 = \frac{F\,S^{-1}\,\rho^{-1}}{F_m\,S_m^{-1}\,\rho_m^{-1}}\,(\frac{\phi}{\phi_m})^2 = x\,\lambda^{-2}\,(\mu^{-1}\,\lambda^3)\,(\frac{\phi}{\phi_m})^2$$

y despejando x:

$$x = \lambda\,\mu\,\tau^{-2}\,(\frac{\phi_m}{\phi})^2 = x\,(\frac{\phi_m}{\phi})^2$$

resulta que para que se cumpla la semejanza dinámica debe ser $\phi_m = \phi$, y tiene que existir una igualdad entre las funciones real del prototipo y del modelo, exigiéndose la igualdad entre los números de F, Re, W y M. Si ésto se logra, se habrá conseguido la semejanza perfecta. Sin embargo, este tipo de semejanza no existe, pero se pueden obtener buenos resultados igualando tan sólo uno de los parámetros F, Re, W, M, consiguiéndose así una semejanza tanto más perfecta cuanto más pequeña sea la influencia de los restantes parámetros en el fenómeno físico que el ensayo pretende reproducir.

LEY DE REECH-FROUDE.- Cuando se estudia un movimiento en el que la gravedad tiene una influencia predominante, por ejemplo, el vertedero de una presa, el error que se comete es muy pequeño al suponer que la función ϕ solo depende del contorno y del número de Froude, con lo que se deberá cumplir ademas la ley general de Newton, $x = \lambda\,\mu\,\tau^{-2}$, siendo ϕ de la forma:

$$\phi = \phi(F , \frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{a}{d})$$

La semejanza geométrica entre el prototipo y el modelo es condición necesaria, pero no suficiente para que, en puntos homólogos, los números de Euler sean iguales.

La semejanza dinámica en los puntos homólogos requiere que: $F = F_m$, es decir:

$$\frac{u}{\sqrt{L g}} = \frac{u_m}{\sqrt{L_m g_m}}$$

y como la aceleración de la gravedad suele ser la misma en el modelo y en el prototipo, al igualar $F = F_m$, se puede utilizar la relación:

$$\frac{u}{\sqrt{L}} = \frac{u_m}{\sqrt{L_m}}$$

que obviamente ya no es adimensional.

De todo esto se obtienen unas relaciones que sirven para predecir, a partir de una serie de medidas de velocidades, caudales, etc, efectuadas en el modelo, los valores correspondientes que son de interés en el prototipo; así se tiene:

Velocidades: $\dfrac{u_m}{\sqrt{L_m}} = \dfrac{u}{\sqrt{L}}\ ;\ \dfrac{u^2}{u_m^2} = \dfrac{L}{L_m} \Rightarrow u = u_m \sqrt{\lambda}$

Caudales: $\dfrac{Q}{Q_m} = \dfrac{\Omega\, u}{\Omega_m u_m} = \lambda^2 \sqrt{\lambda} \Rightarrow Q = Q_m \sqrt{\lambda^5}$

Tiempos: $\dfrac{t}{t_m} = \dfrac{L}{L_m}\,\dfrac{u_m}{u} = \sqrt{\lambda} \Rightarrow t = t_m \sqrt{\lambda}$

Fuerzas: $x = \mu\,\lambda\,\tau^{-2} = \lambda^3 \dfrac{\rho}{\rho_m}\,\lambda\,\dfrac{1}{\lambda}\,\dfrac{g}{g_m} = \lambda^3 \dfrac{\gamma}{\gamma_m} \Rightarrow f = f_m\,\lambda^3\,\dfrac{\gamma}{\gamma_m}$

y suponiendo: $\rho = \rho_m$, resulta: $f = f_m\ \lambda^3$, que es igual a la relación entre masas, $m = m_m\ \lambda^3$

Trabajo: $\dfrac{T}{T_m} = \dfrac{Fuerza\ .\ espacio}{Fuerza_m .\ espacio_m} = \dfrac{Masa\ .\ aceleración\ .\ espacio}{Masa_m .\ aceleración_m .\ espacio_m} = \dfrac{m\,L\,t^{-2} L}{(m\,L\,t^{-2} L)_m} =$

$$= \frac{m}{m_m}\,\frac{L^2}{L_m^2}\,\frac{t_m^{-2}}{t^{-2}} = \lambda^3\ \lambda^2\ \lambda^{-1} = \lambda^4\ ;\ T = T_m\ \lambda^4$$

Presiones: $\dfrac{p}{p_m} = \dfrac{f\,\Omega_m}{f_m\,\Omega} = \lambda^3\ \lambda^{-2} = \lambda\ ;\ p = p_m\ \lambda$

Este caso se puede presentar en orificios, compuertas, ondas de oscilación, cauces fluviales, etc; hay que asegurarse de que no intervengan de modo apreciable ni la tensión superficial, ni la viscosidad.

VI.3.- SEMEJANZA DINÁMICA CON PREDOMINIO DE LA VISCOSIDAD

De la ecuación de Newton: $F = \eta\, \Omega\, \dfrac{du}{dx}$, se deduce que la fuerza debida a la viscosidad es proporcional a η, u, L; la relación entre las fuerzas de inercia y de viscosidad permite obtener el número de Re.

Para que el modelo y el prototipo sean dinámicamente semejantes es necesario que el número de Reynolds sea idéntico en ambos. Cuanto mayor sea el número de Reynolds, menos importancia tiene la viscosidad en el fenómeno, y viceversa.

Si se utiliza el mismo fluido en el prototipo y en el modelo ($\nu = \nu_m$), la *relación entre velocidades* es:

$$Re = Re_m \; ; \quad u\, L = u_m\, L_m \; ; \quad \frac{u}{u_m} = \frac{L_m}{L} = \lambda^{-1} \; ; \quad u = \lambda^{-1}\, u_m$$

y como según Froude: $u = u_m \sqrt{\lambda}$, se comprende es imposible se cumplan ambas relaciones al tiempo, excepto en el caso particular en que $\lambda = 1$, es decir, cuando el modelo sea geométricamente igual al prototipo.

Cuando se ensaya con aire, como su densidad es mucho menor que la del agua, las fuerzas de inercia serán más débiles por lo que las fuerzas de viscosidad se harán relativamente más importantes, comportándose de esta forma el aire como un fluido más viscoso que el agua.

En los túneles de viento, los ensayos se hacen según la ley de Reynolds, siendo sus aplicaciones más importantes el estudio del movimiento laminar de fluidos por tuberías, objetos sumergidos en corrientes fluidas, etc. Las escalas correspondientes se obtienen en forma análoga al caso anterior, que resumimos en la Tabla VI.1.

Tabla VI.1.- Resumen de escalas

	Froude	Reynolds	Weber	Mach
Longitud	λ	λ	λ	λ
Tiempo	$\sqrt{\lambda}$	λ^2	$\sqrt{\lambda^3}$	λ
Velocidad	$\sqrt{\lambda}$	$1/\lambda$	$1/\sqrt{\lambda}$	1
Aceleración	1	$1/\lambda^3$	$1/\lambda^2$	$1/\lambda$
Caudal	$\sqrt{\lambda^5}$	λ	$\sqrt{\lambda^3}$	λ^3
Presión	λ	$1/\lambda^2$	$1/\lambda$	1
Energía	λ^4	λ	λ^2	λ^3
Fuerza	λ^3	1	λ	λ^2

VI.4.- SEMEJANZA DINÁMICA CON PREDOMINIO DE LA ELASTICIDAD

Sabemos que, dimensionalmente, la fuerza de elasticidad es proporcional al módulo de elasticidad y al área sobre la cual actúa dicha fuerza, es decir, proporcional a $E\,L^2$; la relación entre la fuerza de inercia y la fuerza de elasticidad, por unidad de volumen, es el cuadrado del número de Mach, de la forma:

$$M = \frac{u}{\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}} = \frac{u}{c_s}$$

en la que $\vec{c}_s$ es la velocidad del sonido.

En los líquidos, la velocidad del sonido varía sólo ligeramente con la temperatura y la presión, mientras que en los gases sucede lo contrario. Cuanto mayor sea el número de Mach, tanto mayor es la importancia de la elasticidad, y viceversa. Si los números de Mach son iguales, los números de Euler también lo serán. El número de Mach sólo tiene importancia en aquellos problemas en los que la compresibilidad tenga una cierta influencia.

VI.5.- ANÁLISIS DIMENSIONAL

TEOREMA DE BUCKINGHAN.- El Teorema establece que en un problema físico en el que intervienen n variables linealmente independientes, que incluyen m dimensiones, las variables se pueden agrupar en (n-m) parámetros π adimensionales, linealmente independientes.

Algunas de las variables que pueden intervenir en un determinado fenómeno son:

F, fuerza ; L, longitud ; u, velocidad ; ρ densidad ; η viscosidad dinámica ; g gravedad ; c_s velocidad del sonido ; σ tensión superficial ; k_F conductividad térmica del fluido ; c_F calor específico a presión constante ; h_C coeficiente de convección.

Las ***dimensiones*** son:

Longitud L, masa M, tiempo t y temperatura T

Las ***fuerzas*** F que pueden intervenir en un fenómeno son:

$F_{inercia}$ *(debida a un gradiente de presiones)*

$F_{elástica}$

$F_{gravedad}$

$F_{viscosidad}$ *(rozamiento)*

$F_{capilaridad}$ *(tensión superficial).*

Si $A_1, A_2, ..., A_n$ son las variables consideradas, como presión, velocidad, viscosidad, etc., que se supone son esenciales a la hora de resolver un problema, podemos suponer vienen relacionadas mediante una expresión funcional de la forma:

$$F(A_1, A_2, ..., A_n) = 0$$

y si, $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{n-m}$, representan los parámetros adimensionales que agrupan a las variables, $A_1, A_2, ..., A_n$, que incluyen, entre todas ellas, las m dimensiones, el Teorema de Buckinghan establece la existencia de una ecuación, función de estos parámetros, de la forma:

$$f(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{n-m}) = 0$$

El método que permite obtener los parámetros π consiste en seleccionar m de las n variables A_i, las cuales pueden tener diferentes dimensiones, pero deben ser linealmente independientes, de forma que contengan entre todas ellas las m dimensiones, pudiéndose emplear como variables repetitivas al combinarlas con las variables A restantes, formándose así cada parámetro adimensional π. Por ejemplo se puede suponer que A_1, A_2 y A_3 contienen las dimensiones (M, L, t), masa, longitud y tiempo, no necesariamente en cada una de ellas, pero sí en forma colectiva.

El primer parámetro π adimensional es: $\pi_1 = A_1^{x_1}\, A_2^{x_2}\, A_3^{x_3}\, A_4$

El segundo parámetro π adimensional es: $\pi_2 = A_1^{y_1}\, A_2^{y_2}\, A_3^{y_3}\, A_5$

y así sucesivamente hasta el parámetro: $\pi_{n-m} = A_1^{z_1}\, A_2^{z_2}\, A_3^{z_3}\, A_n$

Los exponentes de estas ecuaciones se tienen que examinar de tal manera que cada parámetro π resulte adimensional; se sustituyen las dimensiones de las variables A_i y los exponentes de M, L, t,... se igualan a cero por separado, formándose un sistema de ecuaciones (tres para el ejemplo propuesto), con tres incógnitas para cada parámetro π, pudiéndose determinar los exponentes *x, y, z,* y por lo tanto, los parámetros π correspondientes.

Ecuación general de resistencia.- Las variables que intervienen en el movimiento de un sólido inmerso en una corriente fluida se pueden relacionar mediante la ecuación:

$$\frac{F}{A_L} = f(V_0, L, \rho, \eta)$$

siendo la matriz correspondiente de la forma

	F/A_L	V_0	L	ρ	η
M	1	0	0	1	1
L	-1	1	1	-3	-1
t	-2	-1	0	0	-1

Si por ejemplo se eligen como variables linealmente independientes, V_0, L, ρ, resulta: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$

y como el número de variables *n* que intervienen en el fenómeno es 5 y el número de dimensiones *m* es 3, el número de parámetros π adimensionales que se pueden formar son 2, π_1 y π_2:

$$\pi_1 = (V_0)^{x_1}\,(L)^{x_2}\,(\rho)^{x_3}\,\eta = (L\,t^{-1})^{x_1}\,(L)^{x_2}\,(M\,L^{-3})^{x_3}\,(M\,L^{-1}\,t^{-1}) =$$
$$= (L)^{x_1+x_2-3x_3-1}\,(M)^{x_3+1}\,(t)^{-x_1-1} = (L)^0\,(M)^0\,(t)^0$$

$$\pi_2 = (V_0)^{y_1}\,(L)^{y_2}\,(\rho)^{y_3}\,\frac{F}{A_L} = (L\,t^{-1})^{y_1}\,(L)^{y_2}\,(M\,L^{-3})^{y_3}\,(M\,L^{-1}\,t^{-2}) =$$
$$= (L)^{y_1+y_2-3y_3-1}\,(M)^{y_3+1}\,(t)^{-y_1-2} = (L)^0\,(M)^0\,(t)^0$$

Los parámetros π_1 y π_2 son:

$$\left.\begin{array}{l} x_3 + 1 = 0 \\ x_1 + 1 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3\,x_3 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = -1 \;;\; x_2 = -1 \;;\; x_3 = -1 \;;\; \pi_1 = V_0^{-1}\,L^{-1}\,\rho^{-1}\,\eta = Re^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_3 + 1 = 0 \\ y_1 + y_2 - 3\,y_3 - 1 = 0 \\ y_1 + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y_1 = -2 \;;\; y_2 = 0 \;;\; y_3 = -1 \;;\; \pi_2 = V_0^{-2}\,\rho^{-1}\,\frac{F}{A_L}$$

$$\frac{F}{A_L} = \pi_2\,\rho\,V_0^2 = \frac{1}{2}(2\,\pi_2)\,\rho\,V_0^2 = \frac{1}{2}\,C_w\,\rho\,V_0^2$$

que es la forma que toma la ecuación de resistencia, ya demostrada anteriormente.

Ecuación general de la pérdida de carga en una conducción cilíndrica.- En un conducto de sección circular la pérdida de presión debida a la fricción se conoce como pérdida de carga P, que multiplicada por la sección transversal A_T tiene que ser igual a la pérdida por fricción $\vec{F}$, o fuerza de arrastre, en la forma:

$$F = P\,\frac{\pi\, d^2}{4} = \frac{1}{2}\,(2\,\pi_2)\,\rho\, V_0^2\, A_L = \frac{1}{2}\, C_w\, \rho\, V_0^2\, \pi\, d\, L$$

$$P = \frac{1}{2\,d}\,(8\,\pi_2)\,\rho\, V_0^2\, L = \frac{\lambda\, \rho\, V_0^2\, L}{2\,d} = \frac{8\,\rho\, C_w\, V_0^2\, L}{2\,d}$$

en la que el valor de λ se determina mediante formulación empírica o ábacos y diagramas, de entre los que destaca el diagrama de Moody.

MÉTODO BÁSICO DE ANÁLISIS DIMENSIONAL.- Consiste en reducir al mínimo el número de variables que pueden intervenir en un problema, formando con las mismas una serie de grupos adimensionales independientes. En este método todas las ecuaciones racionales se pueden hacer adimensionales con un cierto número de términos independientes; las variables se acomodan en una ecuación dimensional única, de forma que la combinación de variables para formar grupos o términos adimensionales, proporciona un número de grupos independientes siempre menor que el de variables originales.

El proceso se puede iniciar identificando sólo aquellas variables que son significativas del problema; después se agrupan en una ecuación funcional y se determinan sus dimensiones.

Como aplicación directa del método, vamos a hacer un estudio inicial de la transmisión de calor desde un tubo cilíndrico a un fluido que circula por su interior en régimen turbulento.

Si se considera un flujo en convección forzada, y que el tubo está limpio y sin incrustaciones, los coeficientes de película h_C se determinan experimentalmente como función de un cierto número de factores que representan las características dinámicas del flujo y las propiedades físicas del fluido.

El rozamiento del fluido supone un intercambio de energía entre él y la superficie interna del tubo, mientras que la transmisión de calor por convección forzada supone un intercambio de energía térmica entre la superficie del tubo y el fluido; ambos fenómenos dependen del grado de turbulencia del fluido.

En general el rozamiento de un fluido en circulación forzada depende de los siguientes factores:

a) Diámetro interior del tubo d_i ; b) Longitud del tubo L ; c) Velocidad media del fluido u_F en el intervalo correspondiente a la longitud L; d) Densidad del fluido ρ ; e) Viscosidad dinámica del fluido η ; f) Rugosidad relativa del tubo ε/d_i

La transmisión de calor depende de la conductividad k_F del fluido y de su calor específico a presión constante c_F; la determinación del coeficiente h_C de la transmisión de calor por convección forzada, se puede iniciar a partir de la ecuación:

$$\frac{Q}{A_L\, \Delta T} = h_C = \phi\left(d_i, u_F, \rho, \eta, L, k_F, c_F, \frac{\varepsilon}{d_i}\right) \quad ; \quad F\left(d_i, u_F, \rho, \eta, L, k_F, c_F, \frac{\varepsilon}{d_i}\right) = 0$$

y que adimensionalmente se puede expresar mediante la siguiente matriz:

	d_i	u_F	ρ	η	L	k_F	c_F	h_c
Masa M	0	0	1	1	0	1	0	1
Longitud L	1	1	-3	-1	1	1	2	0
Tiempo t	0	-1	0	-1	0	-3	-2	-3
Temperatura T	0	0	0	0	0	-1	-1	-1

de 7 variables y cuyo discriminante es de razón 4, por lo que habrá que especificar de antemano el valor de 3 variables cualesquiera.

El valor de h_C se puede expresar en la forma adimensional siguiente:

$$h_c = d_i^a\, u_F^b\, \rho^c\, \eta^d\, L^e\, k_F^f\, c_F^i$$

$$(M\, t^{-3}\, T^{-1}) = (L)^a\, (L\, t^{-1})^b\, (M\, L^{-3})^c\, (M\, L^{-1}\, t^{-1})^d\, (L)^e\, (M\, L\, t^{-3}\, T^{-1})^f\, (L^2\, t^{-2}\, T^{-1})^i =$$
$$= M^{c+d+f}\, L^{a+b-3c-d+e+f+2i}\, t^{-b-d-3f-2i}\, T^{-f-i}$$

Identificando coeficientes se obtiene el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} c + d + f = 1 \\ a + b - 3c - d + e + f + 2 = 0 \\ b + d + 3f + 2i = 3 \\ f + i = 1 \end{cases}$

que es un sistema de 4 ecuaciones linealmente independientes, con 7 incógnitas, pudiéndose fijar 3 incógnitas, por ejemplo (i, b, e) y poner las otras 4 en función de ellas, quedando:

$$\left.\begin{array}{l} f = 1 - i \\ d = 1 - c - f = i - c = 3 - b - 3f - 2i = 3 - b - 3 + 3i - 2i = -b + i \\ c = b \\ a = -b + 3c + d - e - f - 2i = -1 + b - e \end{array}\right\}$$

por lo que:

$$h_C = d_i^{-1+b-e}\, u_F^b\, \rho^b\, \eta^{-b+i}\, L^e\, k_F^{1-i}\, c_F^i = (\frac{d_i}{k_F})^{-1}(\frac{d_i u_F \rho}{\eta})^b(\frac{d_i}{L})^{-e}(\frac{\eta\, c_F}{k_F})^i$$

que a su vez se puede poner en la forma:

$$\frac{h_C\, d_i}{k_F} = \varphi(\frac{d_i\, u_F\, \rho}{\eta}, \frac{d_i}{L}, \frac{\eta\, c_F}{k_F})$$

y que para la transmisión de calor por convección forzada, indica que si se efectúan una serie de pruebas que difieran solamente en el valor de la velocidad u_F, con los valores que así se obtengan, junto con los de h_C medidos experimentalmente, se pueden determinar la función o funciones que ligan a los grupos adimensionales

$$Re = \frac{d_i\, u_F\, \rho}{\eta} = \frac{d_i\, u_F}{\nu} \;\; ; \;\; Nu = \frac{h_C\, d_i}{k_F} \;\; ; \;\; Pr = \frac{c_F\, \eta}{k_F}$$

que sólo serán válidas para valores particulares de los demás grupos adimensionales; por lo tanto:

$$Nu = \varphi(Re, Pr, \frac{d_i}{L})$$

modelo que no admite cambios de estado en el fluido que circula; la formulación desarrollada es muy adecuada para estudiar la influencia de la velocidad u_F sobre el coeficiente de transmisión de calor por convección forzada h_C de un sistema cualquiera, pues estas dos variables aparecen una sola vez.

El procedimiento normal para determinar los exponentes (b,e,i) a partir de datos experimentales consiste en igualar el calor transmitido al fluido por convección, con la variación de entalpía que experimenta por esta causa.

Calor transmitido al fluido por convección:

$$Q = h_C\, A_L\, (T_{pF} - T_F\,)$$

Variación de entalpía del fluido:

$$Q = m\, c_F\, (T_{sal} - T_{ent}\,) = A_T\, u_F\, \rho\, c_F\, (\,T_{sal} - T_{ent}\,) = G\, A_T\, c_F\, (\,T_{sal} - T_{ent}\,) = G\, A_T\, (\,i_{sal} - i_{ent}\,)$$

en la que: $\begin{cases} G \text{ es la velocidad másica} = 3600\, u_F \rho,\ kg\,/\,m^2 hora,\ \text{viniendo } u_F \text{ en } m\,/\,seg \\ A_T \text{ es el área de la sección transversal del tubo correspondiente al diámetro interior} \\ A_L \text{ es el área de la superficie de la pared en contacto con el fluido} \end{cases}$

Igualándolas se obtiene:

$$\frac{h_C}{c_F G} = \frac{A_T\,(\,T_{sal} - T_{ent}\,)}{A_L\,(\,T_{pF} - T_F\,)} = St = \frac{Nu}{Re\ Pr}$$

El número de Stanton *St* se calcula a partir de datos de Laboratorio.

Para *fluidos que se calientan en el interior de tubos,* se aplica satisfactoriamente la ecuación de Dittus-Boelter, función de los números de Nusselt, Reynolds y Prandtl, de la forma:

$Nu = 0{,}023\, Re^{0{,}8}\, Pr^{0{,}4}$, siendo: $\begin{cases} Pr = \dfrac{\nu}{\alpha} = \dfrac{c_F\ \eta}{k_F} \\ Nu = \dfrac{h_C\ \Delta T}{k_F\ \Delta T}\, L = \dfrac{h_C\, L}{k_F} \end{cases}$

en la que:

- *El coeficiente de convección* h_C *(Kcal / hora m²°C)*
- *La conductividad térmica* k_F *del fluido (Kcal / m°C)*
- *La velocidad másica G (kg / m² hora)*

El número de Nusselt es la relación entre el calor transmitido por convección y el calor transmitido por conducción, en la longitud característica L.

VI.6.- APLICACIÓN DEL ANÁLISIS DIMENSIONAL A LAS BOMBAS CENTRIFUGAS

Las variables que intervienen en el movimiento de un líquido, a través de los álabes de una bomba centrífuga, pueden relacionarse mediante la siguiente ecuación:

$$f\,(\,E, D, q,\ \rho,\ \eta, n\,) = 0$$

en la que:

$E = g\, H_m$ *es la energía específica*
D el diámetro
q el caudal bombeado
ρ *la densidad del líquido utilizado*
η *la viscosidad dinámica del líquido*
n el número de revoluciones por minuto de la bomba

Como estas seis variables dependen total o parcialmente de las dimensiones (M, L, t), se pueden obtener, 6 - 3 = 3, parámetros π adimensionales. La matriz correspondiente a estas variables es:

	E	D	q	ρ	η	n
M	0	0	0	1	1	0
L	2	1	3	-3	-1	0
t	-2	0	-1	0	-1	-1

Podemos tomar, por ejemplo, E, D y ρ, como variables independientes por cuanto su determinante es distinto de cero:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

pudiéndose poner que: $\begin{cases} \pi_1 = E^{x_1}\, D^{y_1}\, \rho^{z_1}\, q = L^{(2x_1 + y_1 - 3z_1 + 3)}\, t^{(-2x_1 - 1)}\, M^{z_1} \\ \pi_2 = E^{x_2}\, D^{y_2}\, \rho^{z_2}\, n = L^{(2x_2 + y_2 - 3z_2)}\, t^{(-2x_2 - 1)}\, M^{z_2} \\ \pi_3 = E^{x_3}\, D^{y_3}\, \rho^{z_3}\, \eta = L^{(2x_3 + y_3 - 3z_3 - 1)}\, t^{(-2x_3 - 1)}\, M^{(z_3 + 1)} \end{cases}$

de las que se deducen los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + y_1 - 3z_1 + 3 = 0 \\ -2x_1 - 1 = 0 \\ z_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}\ ;\ y_1 = -2 \Rightarrow \pi_1 = \frac{q}{\sqrt{E}\, D^2} = \frac{q}{\sqrt{g H_m}\, D^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_2 + y_2 - 3z_2 = 0 \\ -2x_2 - 1 = 0 \\ z_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}\ ;\ y_2 = 1 \Rightarrow \pi_2 = \frac{n D}{\sqrt{E}} = \frac{n D}{\sqrt{g H_m}}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_3 + y_3 - 3z_3 - 1 = 0 \\ -2x_3 - 1 = 0 \\ z_3 + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{2}\ ;\ y_3 = -1\ ;\ z_3 = -1 \Rightarrow \pi_3 = \frac{\eta}{\rho D \sqrt{E}} = \frac{\eta}{\rho D \sqrt{g H_m}} = \frac{\nu}{D \sqrt{g H_m}}$$

Los parámetros adimensionales π_1, π_2 y π_3 permanecen constantes para cada serie de bombas semejantes, funcionando en condiciones dinámicas semejantes (igual rendimiento). A partir de ellos, se pueden obtener otros parámetros adimensionales combinándolos adecuadamente, obteniéndose:

$$\pi_4 = \frac{\pi_1}{\pi_3} = \frac{q}{D^2 \sqrt{q H_m}}\, \frac{D \sqrt{q H_m}}{\nu} = \frac{q}{\nu D} \quad \textit{(N° de Re para bombas)}$$

$$\pi_5 = \pi_2 \sqrt{\pi_1} = \frac{\sqrt{q}}{D \sqrt[4]{g H_m}}\, \frac{n D}{\sqrt{g H_m}} = \frac{n \sqrt{q}}{(g H_m)^{3/4}} \quad \textit{(Velocidad específica)}$$

$$\pi_6 = \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{q}{D^2 \sqrt{q H_m}}\, \frac{\sqrt{q H_m}}{n D} = \frac{q}{n D^3} = q_s \quad \textit{(Caudal específico)}$$

$$\pi_7 = \frac{1}{\pi_2^2} = \frac{q H_m}{n^2 D^2} = \frac{\pi_6^{2/3}}{\pi_5^{4/3}}$$

De todas las combinaciones que se puedan obtener, sólo 3 son linealmente independientes.

VI.7.- APLICACIÓN DEL ANÁLISIS DIMENSIONAL A VERTEDEROS EN PARED DELGADA

Las variables que intervienen en el movimiento de un líquido a través de un vertedero, se pueden relacionar mediante la ecuación:

$v = f(h, \rho, g, \eta, \sigma)$

en la que $\sigma = \frac{F}{L}$ es la tensión superficial, $\vec{v}$ la velocidad del líquido que pasa por el vertedero, ρ y η la densidad y viscosidad dinámica del líquido utilizado, respectivamente, y h la carga en la corona del vertedero; las seis variables dependen total o parcialmente de las dimensiones (M, L, t), por lo que se pueden obtener, 6 - 3 = 3, parámetros π adimensionales.

La matriz correspondiente a estas variables es de la forma:

	v	h	ρ	g	η	σ
M	0	0	1	0	1	1
L	1	1	-3	1	-1	0
t	-1	0	0	-2	-1	-2

Podemos tomar, por ejemplo, v, h y ρ, como variables independientes por cuanto su determinante es distinto de cero:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \text{ , pudiéndose poner que: } \begin{cases} \pi_1 = q^{x_1}\, h^{y_1}\, \rho^{z_1}\, g = L^{(x_1 + y_1 - 3 z_1 + 1)}\, t^{(-x_1 - 2)}\, M^{z_1} \\ \pi_2 = q^{x_2}\, h^{y_2}\, \rho^{z_2}\, \eta = L^{(x_2 + y_2 - 3 z_2 - 1)}\, t^{(-x_2 - 1)}\, M^{z_2 + 1} \\ \pi_3 = q^{x_3}\, h^{y_3}\, \rho^{z_3}\, \sigma = L^{(x_3 + y_3 - z_3)}\, t^{(-x_3 - 2)}\, M^{(z_3 + 1)} \end{cases}$$

de las que se deducen los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + y_1 - 3 z_1 + 1 = 0 \\ x_1 + 2 = 0 \\ z_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = -2 \;;\; y_1 = 1 \;\Rightarrow\; \pi_1 = v^{-2} h\, g \;;\quad v = \sqrt{\frac{g\,h}{\pi_1}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_2 + y_2 - 3 z_2 - 1 = 0 \\ x_2 + 1 = 0 \\ z_2 + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_2 = -1 \;;\; y_2 = -1 \;;\; z_2 = -1 \;\Rightarrow\; \pi_2 = v^{-1} h^{-1} \rho^{-1} \eta = v^{-1} h^{-1} \nu = \frac{1}{Re}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_3 + y_3 - z_3 = 0 \\ x_3 + 2 = 0 \\ z_3 + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_3 = -2 \;;\; y_3 = 1 \;;\; z_3 = -1 \;\Rightarrow\; \pi_3 = v^{-2} h\, \rho^{-1} \sigma = \frac{h\,\sigma}{v^2\,\rho} = \left| N^o\ Weber:\ \ W = v\sqrt{\frac{\rho h}{\sigma}} \right| = \frac{h^2}{W^2}$$

Los parámetros adimensionales π_1, π_2 y π_3 permanecen constantes para cada vertedero. Si se hace la combinación:

$$\pi_4 = \frac{\pi_1\, \pi_3}{\pi_2} = \frac{\dfrac{h\,g}{v^2}\,\dfrac{h^2}{W^2}}{\dfrac{1}{Re}} = \frac{h^3 g\, Re\, W^{-2}}{v^2} \quad\Rightarrow\quad v^2 = \pi_4^{-1} h^3 g\, Re\, W^{-2}$$

resulta la expresión del caudal:

$$q = \Omega v = \Omega\, \pi_4^{-1/2}\, h^{3/2} Re^{1/2}\, W^{-1} = h^{3/2}\, g^{1/2} \psi(Re, W, \pi_4) = C\, h \sqrt{g\,h}$$

que es la ecuación general del vertedero, siendo C un coeficiente que comprende sus características; el caudal en cualquier vertedero es proporcional a $h^{3/2}$, siendo h la carga del mismo.