

VII.- TEORÍA ELEMENTAL DE LA CAPA LIMITE BIDIMENSIONAL

pfernandezdiez.es

VII.1.- CAPA LIMITE LAMINAR Y TURBULENTO EN FLUJO SOBRE PLACA PLANA

En el movimiento de fluidos sobre una placa plana, la Hidrodinámica clásica se limita a imponer, como condición de contorno, la tangencia del vector velocidad, mientras que la Mecánica de Fluidos viscosos exige la condición adicional de adherencia al contorno de la placa, que es mucho más restrictiva que la de tangencia. En los fluidos poco viscosos, los esfuerzos tangenciales son, con frecuencia, muy inferiores a los de inercia o a los de gravedad, pero esto no autoriza a prescindir de los esfuerzos viscosos, que pueden llegar a ejercer una influencia considerable sobre la configuración del movimiento.

Prandtl, en 1904, propuso que el estudio del movimiento de un fluido de viscosidad pequeña se podía asimilar al de un fluido perfecto, salvo en una capa próxima al contorno, de espesor δ , en la que se concentraban los fenómenos de fricción, a la que llamó *capa límite*; en el exterior de dicha capa, las tensiones tangenciales son despreciables, predominando las fuerzas de inercia sobre las fuerzas de viscosidad, mientras que en el interior de la capa límite, la proximidad del contorno hace que el gradiente de velocidades sea muy grande y, por lo tanto, que la tensión tangencial $\tau = \eta \frac{du}{dy}$, sea también muy grande; en esta situación, las fuerzas de fricción son del mismo orden de magnitud que las fuerzas de inercia.

El espesor δ de la capa límite puede estar comprendido entre unas pocas moléculas y algunos milímetros, según los casos; fuera de la capa límite se pueden utilizar las ecuaciones de Euler o métodos experimentales basados en las líneas y redes de corriente, que una vez configuradas alrededor del perfil deseado, permiten obtener el campo de velocidades y la distribución de presiones correspondiente.

En el estudio de la capa límite hay que tener presentes las siguientes consideraciones:

a) Aunque la perturbación producida por la fricción se propaga a todo el fluido, se admite que la propagación queda limitada a una zona del mismo espesor finito δ , en sentido normal al contorno.

b) La forma de la curva de distribución de velocidades en las distintas secciones a lo largo de la capa límite, se puede expresar, en general, mediante las siguientes ecuaciones, Fig VII.1:

Régimen laminar:

$$\frac{u}{V_0} = C + C_1 \left(\frac{y}{\delta}\right) + C_2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + C_3 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \dots$$

Régimen turbulento

$$\frac{u}{V_0} = m \sqrt{\frac{y}{\delta}}$$

en la que \bar{V}_0 es la velocidad uniforme del fluido no perturbado; la capa límite en su desarrollo longitudinal, muestra una tendencia progresiva al ensanchamiento, Fig VIII 1.b.

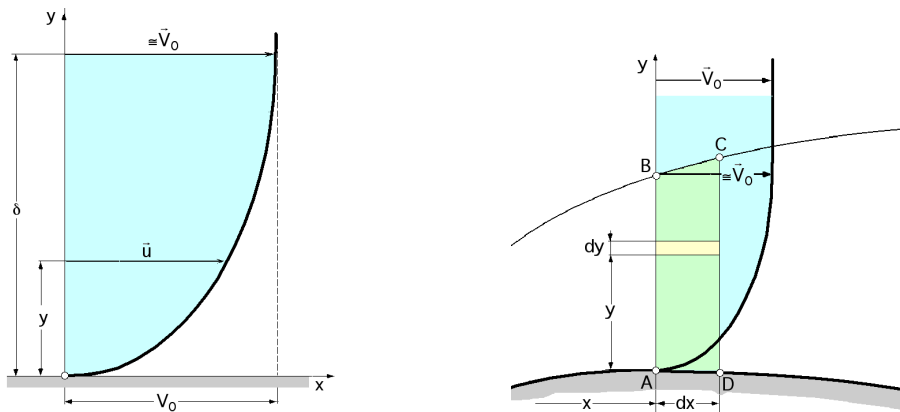


Fig VII.1.a.b.- Capa límite

Polinomio de segundo grado.- La distribución de velocidades es de la forma:

$$\frac{u}{V_0} = C + C_1 \left(\frac{y}{\delta}\right) + C_2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

con las condiciones: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Para: } y = 0, u = 0 \Rightarrow C = 0 \\ \text{Para: } y = \delta, u = V_0 \Rightarrow 1 = C_1 + C_2 ; \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = 0 \end{array} \right.$

$$\frac{1}{V_0} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = \left(\frac{C_1}{\delta} + \frac{2 C_2 y}{\delta^2} \right)_{y=\delta} = \frac{C_1}{\delta} + \frac{2 C_2}{\delta} = 0 \Rightarrow C_1 + 2 C_2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 2 C_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = 2 ; C_2 = -1$$

el perfil de la distribución de velocidades de la capa límite, en régimen laminar, es:

$$\frac{u}{V_0} = \frac{2y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

Polinomio de tercer grado.- La distribución de velocidades es de la forma:

$$\frac{u}{V_0} = C + C_1 \left(\frac{y}{\delta}\right) + C_2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + C_3 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

con las condiciones: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Para: } y = 0, u = 0 \Rightarrow C = 0 \\ \text{Para: } y = \delta, u = V_0 \Rightarrow 1 = C_1 + C_2 + C_3 ; \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = 0 \end{array} \right.$

$$\frac{1}{V_0} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = \left\{ \frac{C_1}{\delta} + \frac{2 C_2}{\delta} \left(\frac{y}{\delta}\right) + \frac{3 C_3 y}{\delta} \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right\}_{y=\delta} = 0 \Rightarrow C_1 + 2 C_2 + 3 C_3 = 0$$

$$\text{Para: } y = 0 ; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0 \Rightarrow \frac{1}{V_0} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \left\{ 0 + \frac{2 C_2}{\delta^2} + \frac{6 C_3}{\delta^2} \left(\frac{y}{\delta}\right) \right\}_{y=0} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ C_1 + 2 C_2 + 3 C_3 = 0 \\ C_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = \frac{3}{2} ; C_2 = 0 ; C_3 = -\frac{1}{2}$$

el perfil de la distribución de velocidades de la capa límite, en régimen laminar, es:

$$\frac{u}{V_0} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

Experimentalmente se ha comprobado, para placa plana, que el movimiento laminar en la capa límite llega a hacerse inestable cuando se sobrepasa un valor crítico del número de Reynolds:

$$Re_c = \frac{V_0 x_C}{\nu}$$

siendo x_C la distancia a partir del borde de ataque de la placa.

La capa límite continua su desarrollo, como se muestra en la Fig VII.2; a partir de x_C , se origina la capa límite turbulenta, que se divide en dos subcapas, una de las cuales, en las proximidades de la placa, permite definir una delgada subcapa marcadamente laminar.

Los valores críticos del número de Reynolds que definen la transición, para *placa plana*, son:

$$Re_{laminar} < 5 \cdot 10^5 ; Re_{turbulento} > 3 \cdot 10^6$$

Para fluidos que circulan entre dos paredes próximas, el ensanchamiento progresivo de la capa límite de cada contorno determina que éstas se unan, a una cierta distancia de la entrada, desapareciendo la zona en que el movimiento podía ser asimilable a un fluido perfecto, para realizarse todo él bien en régimen laminar, o bien en régimen turbulento, según el valor del número de Reynolds.

En tuberías sólo se puede considerar el movimiento como irrotacional, en las proximidades de la embocadura; con flujo totalmente desarrollado, no.

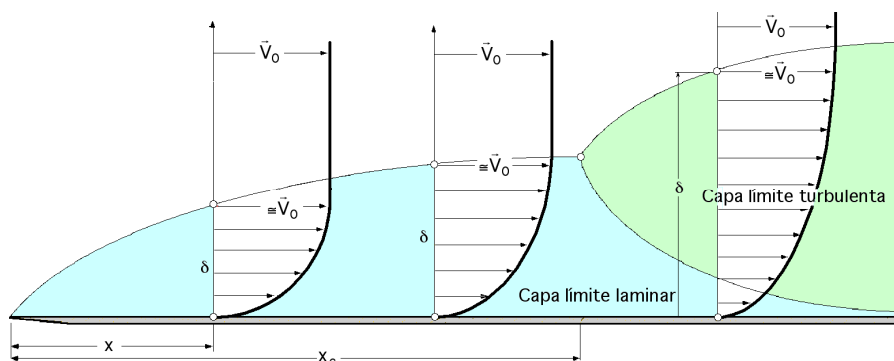


Fig VII.2.- Desarrollo de la capa límite laminar

VII.2.- ESPESORES Y CAUDALES DE LA CAPA LIMITE

Mediante el concepto de capa límite es posible concentrar en un espesor δ los fenómenos de fricción; ello implica el que se tengan que cumplir las siguientes condiciones:

a) El valor de la velocidad \bar{u} correspondiente a ($y = \delta$) tiene que estar muy próximo a \bar{V}_0 , pues entonces el gradiente de velocidades es despreciable; suele tomarse, $u = 0,99 V_0$.

b) El esfuerzo de fricción evaluado en la zona de espesor δ , (a lo largo del contorno), mediante la ecuación de la cantidad de movimiento, tiene que coincidir con el obtenido analíticamente para la capa límite laminar, o con el deducido experimentalmente en la capa límite turbulenta.

En ambas situaciones la distribución de velocidades viene dada, para el régimen laminar, por polinomios de grado m (parábolas de segundo o tercer grado en general) y para el régimen turbulento por polinomios de grado $(1/m)$.

Espesor de desplazamiento de la capa límite.- El espesor de desplazamiento de la capa límite δ_1 está basado en la conservación del caudal a lo largo de la normal al contorno, mediante la equivalencia de las áreas rayadas, como se indica en la Fig VII.3.

Si se admite que la ley de velocidades es asintótica a \bar{V}_0 :

$$\delta_1 = \frac{1}{V_0} \int_0^\infty (V_0 - u) dy$$

y si la ley de distribución de velocidades alcanza el valor \bar{V}_0 para el espesor δ , se tiene:

$$\delta_1 = \frac{1}{V_0} \int_0^\delta (V_0 - u) dy = \int_0^\delta (1 - \frac{u}{V_0}) dy = \delta - \int_0^\delta \frac{u}{V_0} dy = \delta - \frac{q}{V_0}$$

que se puede interpretar como la diferencia entre el espesor δ y el espesor δ_1 de una corriente que tuviese la misma velocidad \bar{V}_0 que la corriente exterior y transportase la misma masa de fluido (caudal q) que la capa límite real.

Considerando capa límite turbulenta: $\frac{u}{V_0} = m \sqrt{\frac{y}{\delta}}$, resulta:

$$\delta_1 = \delta - \int_0^\delta (\frac{y}{\delta})^{1/m} dy = \delta - \frac{1}{\delta^{1/m}} \int_0^\delta y^{1/m} dy = \frac{\delta}{m + 1}$$

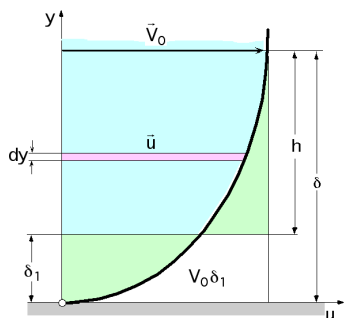


Fig VII.3.- Espesor de desplazamiento de la capa límite

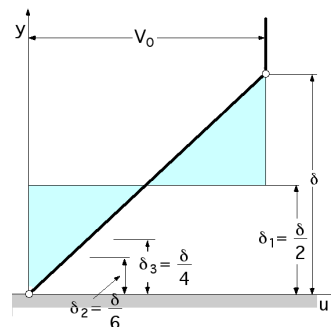


Fig VII.4.- Espesores de la capa límite en distribución triangular

Espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite.- El espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite δ_2 se define en la forma:

$$\delta_2 = \frac{1}{V_0^2} \int_0^\delta u (V_0 - u) dy = \int_0^\delta \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy$$

y se corresponde con el espesor de una corriente fluida que tenga la misma velocidad \bar{V}_0 que la corriente exterior, y la misma variación de la cantidad de movimiento que la debida a la fuerza de arrastre de la capa límite real.

Considerando capa límite turbulenta: $\frac{u}{V_0} = \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}}$ se tiene:

$$\delta_2 = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/m} \left\{1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/m}\right\} dy = \frac{1}{\delta^{2/m}} \int_0^\delta y^{1/m} (\delta^{1/m} - y^{1/m}) dy = \delta \frac{m}{(m+1)(m+2)}$$

La relación entre el espesor de desplazamiento δ_1 y el espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite δ_2 , (δ_1/δ_2) , se denomina **Factor de forma** F del perfil; para una placa plana, en función de m se tiene:

$$F = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\delta \frac{1}{(m+1)}}{\delta \frac{m}{(m+1)(m+2)}} = \frac{m+2}{m}$$

Un valor elevado del factor de forma del perfil implica que está próximo a producirse el desprendimiento de la capa límite.

Espesor de energía de la capa límite.- El espesor de energía de la capa límite δ_3 se define en la forma:

$$\delta_3 = \frac{1}{V_0^3} \int_0^\delta u (V_0^2 - u^2) dy = \int_0^\delta \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u^2}{V_0^2}\right) dy = \left| \frac{u}{V_0} = \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}} \right| = \int_0^\delta \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}} \left\{1 - \sqrt[m]{\left(\frac{y}{\delta}\right)^2}\right\} dy = \delta \frac{2m}{(m+1)(m+2)}$$

Para hacernos una idea del orden de magnitud y del significado, de los diversos espesores de la capa límite así definidos, indicamos en la Fig VII.4, para el caso particular de una distribución de velocidades triangular ($m = 1$), el orden de magnitud de los mismos, de la forma:

$$\delta_1 = \frac{\delta}{2} ; \quad \delta_2 = \frac{\delta}{6} ; \quad \delta_3 = \frac{\delta}{4}$$

Caudal de la capa límite.- El caudal a través de la capa límite se ha definido como:

$$q = \int_0^\delta u dy$$

Teniendo en cuenta el espesor de desplazamiento:

$$\delta_1 = \int_0^\delta dy - \int_0^\delta \frac{u dy}{V_0} = \delta - \int_0^\delta \frac{u dy}{V_0}$$

resulta:

$$\delta - \delta_1 = \int_0^\delta \frac{u dy}{V_0} = \frac{q}{V_0} \Rightarrow q = V_0(\delta - \delta_1) = V_0 \delta \frac{m}{m+1}$$

Caudal de la cantidad de movimiento de la capa límite.- El caudal de la cantidad de movimiento de la capa límite q_M se define en la forma:

$$q_M = m u = V \rho u = q \rho u = \int_0^\delta \rho u^2 dy$$

Teniendo en cuenta la expresión del espesor de la cantidad de movimiento δ_2 se obtiene:

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{V_0} \left\{ 1 - \frac{u}{V_0} \right\} dy = \int_0^\delta \frac{u}{V_0} dy - \int_0^\delta \frac{u^2}{V_0^2} dy = \delta - \delta_1 - \int_0^\delta \frac{u^2}{V_0^2} dy$$

$$\int_0^\delta u^2 dy = (\delta - \delta_1 - \delta_2) V_0^2$$

quedando la expresión del caudal de la cantidad de movimiento en la forma:

$$q_M = \int_0^\delta \rho u^2 dy = \rho (\delta - \delta_1 - \delta_2) V_0^2 = \rho \delta V_0^2 \frac{m}{m+2}$$

función del espesor δ de la capa límite, del espesor de desplazamiento δ_1 y del espesor de la cantidad de movimiento δ_2 .

VII.3.- ECUACIÓN INTEGRAL DEL IMPULSO DE LA CAPA LÍMITE

Caudal de la cantidad de movimiento.- Como consecuencia de la viscosidad del fluido y de su deformación, aparece un esfuerzo tangencial sobre el contorno de la placa que determina lo que se conoce como *Resistencia de Superficie o de Forma*. Para calcular este esfuerzo se aplica el Teorema de la Cantidad de movimiento al volumen de fluido comprendido en el interior de la capa límite entre las secciones (AB) y (DC) de la Fig VII.5. Como el movimiento irrotacional exterior a la capa límite es uniforme, no existe gradiente de presiones y, al expresar el equilibrio, la única fuerza actuante es la de arrastre sobre la placa, de la forma $\tau_0 dx$.

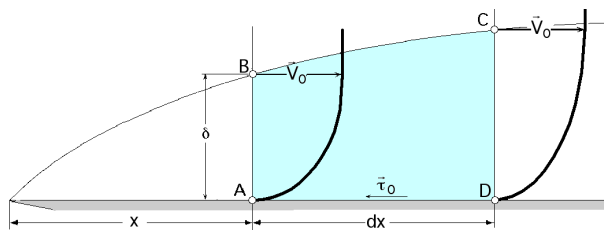


Fig VII.5.- Volumen de fluido en la capa límite

Como el movimiento irrotacional exterior a la capa límite es uniforme, no existe gradiente de presiones y, al expresar el equilibrio, la única fuerza actuante es la de arrastre sobre la placa, de la forma $\tau_0 dx$.

Para una anchura de placa unidad, el caudal de la cantidad de movimiento se evalúa como sigue:

Para una anchura de placa unidad, el caudal de la cantidad de movimiento se evalúa como sigue:

Sobre la sección (AB), el caudal de la cantidad de movimiento entrante es:

$$q_{M(AB)} = m u = V \rho u = q \rho u = \int_0^\delta \rho u^2 dy = q_M$$

Sobre la sección (CD), el caudal de la cantidad de movimiento saliente es:

$$q_{M(CD)} = q_M + \frac{\partial q_M}{\partial x} dx = q_M + \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta u^2 dy \right) dx$$

y en el volumen (ABCD) se tiene una variación del caudal de la cantidad de movimiento, $q_{M(AB)} - q_{M(CD)}$, en la forma:

$$\frac{\partial q_M}{\partial x} dx = \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta u^2 dy \right) dx$$

Sobre el contorno (BC) no existe ningún tipo de esfuerzo cortante porque está fuera de la capa límite.

te $\frac{du}{dy} = 0$; teniendo en cuenta que sobre este contorno la velocidad es \vec{V}_0 , el caudal de la cantidad de movimiento entrante por (BC) se obtiene en la forma:

$$q_{M(B)} = m V_0 = q \rho V_0 = \rho V_0 \int_0^\delta u dy$$

$$q_{M(C)} = q_{M(B)} + \frac{\partial q_{M(B)}}{\partial x} dx = q_{M(B)} + \rho V_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta u dy \right) dx$$

por lo que:

$$q_{M(BC)} = \rho V_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta u dy \right) dx$$

Sobre el contorno (AD) de contacto con la placa no hay caudal saliente de la cantidad de movimiento.

Fuerza de arrastre.- Igualando el caudal de la cantidad de movimiento con la fuerza de arrastre \vec{F}_a sobre la placa en dx, y aplicando el Teorema del Impulso se obtiene:

$$\tau_0 dx = - \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta (u^2 dy) dx + V_0 \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta (u dy) dx = \rho \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^\delta u (V_0 - u) dy \right\} dx$$

$$F_a = \int \tau_0 dx = \rho \int_0^\delta u (V_0 - u) dy = \rho V_0^2 \delta_2 = \frac{C_w x \rho V_0^2}{2}, \text{ con: } \tau_0 = \frac{C_w \rho V_0^2}{2}$$

$$\tau_0 = \eta \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \rho \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^\delta u (V_0 - u) dy \right\} \quad ; \quad \nu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^\delta u (V_0 - u) dy \right\}$$

en la que $\delta_2 = \frac{C_w x}{2}$ se deduce comparándola con la obtenida por análisis dimensional; los valores de C_w se obtienen mediante formulación, ábacos y tablas.

a) Para una distribución de velocidades de la capa límite laminar, de la forma: $\frac{u}{V_0} = \frac{2y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$

$$\frac{1}{V_0} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{2}{\delta} \Rightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{2 V_0}{\delta}$$

con:

$$\tau_0 = \eta \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \rho \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^\delta u (V_0 - u) dy \right\} = \rho V_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^\delta \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy \right\}$$

obteniéndose:

$$\nu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = V_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^\delta \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{2 V_0 \nu}{\delta} &= V_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy = V_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^\delta \left\{ \frac{2y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right\} \left\{ 1 - \frac{2y}{\delta} + \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right\} dy \right\} = \\ &= V_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(2 - \frac{5}{3} - \frac{1}{5} \right) \delta = \frac{2}{15} V_0^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} \end{aligned}$$

$$C_w = \frac{1}{L} \int_0^L C_x dx = 2 C_x|_{x=L} = \frac{1,4606}{\sqrt{Re_L}}$$

$$\frac{15 \nu}{V_0} dx = \delta d\delta \Rightarrow \frac{15 \nu}{V_0} x = \frac{\delta^2}{2} + C \Rightarrow \delta^2 = \frac{30 x^2}{Re_x} \Rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{5,477}{\sqrt{Re_x}}$$

en la que se ha tenido en cuenta que para: $\delta = 0$; $x = 0 \Rightarrow C = 0$

Como:

$$\tau_0 = \eta \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = C_x \rho \frac{V_0^2}{2} = \eta \frac{2 V_0}{\delta}$$

los valores de los coeficientes C_x (local) y C_w (medio), son:

$$C_x = \frac{4 \nu}{\delta V_0} = \frac{4 x}{\delta Re_x} = \frac{4}{\frac{\delta}{x} Re_x} = \frac{4}{5,477 \sqrt{Re_x}} = \frac{0,7303}{\sqrt{Re_x}}$$

$$C_w = \frac{1}{L} \int_0^L C_x dx = 2 C_x \Big|_{x=L} = \frac{1,4606}{\sqrt{Re_L}}$$

b) Para una distribución de velocidades de la capa límite de la forma: $\frac{u}{V_0} = \frac{3y}{2\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3$, resulta:

$$\tau_0 = \eta \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \eta \frac{3 V_0}{2 \delta}$$

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \rho V_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^\delta \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy \right\} = \rho V_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^\delta \left\{ \frac{3y}{2\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right\} \left\{ 1 - \frac{3y}{2\delta} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right\} dy \right\} \\ &= 0,139 \rho V_0^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{3 \eta V_0}{2 \delta} \end{aligned}$$

Igualándolas:

$$\delta d\delta = 10,79 \frac{\nu dx}{V_0} \Rightarrow \frac{\delta^2}{2} = 10,79 \frac{\nu}{V_0} x + Cte = \left| \text{Para: } \begin{cases} \delta = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow Cte = 0 \right| = 10,79 \frac{\nu}{V_0} x$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4,64}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\tau_0 = \frac{3 \eta V_0}{2 \delta} = \frac{3 \eta V_0 \sqrt{Re_x}}{2 x 4,64 x} = \frac{0,323 \eta V_0 \sqrt{Re_x}}{x} = 0,323 \sqrt{\frac{\eta \rho V_0^3}{x}} = \frac{\rho V_0^2 C_x}{2}$$

$$C_x = \frac{0,646 \nu \sqrt{Re_x}}{x V_0} = \frac{0,646}{\sqrt{Re_x}} \quad ; \quad C_w = \frac{1}{L} \int_0^L C_x dx = 2 C_x \Big|_{x=L} = \frac{1,292}{\sqrt{Re_L}}$$

El valor de C_w obtenido para placa plana, está muy próximo al valor exacto (Blasius), de la forma:

$$C_x = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} \quad ; \quad C_w = \frac{1,328}{\sqrt{Re}} \quad ; \quad \frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}}$$

siendo la fuerza de arrastre \vec{F}_a sobre cada cara de la placa de longitud L y anchura unidad:

$$F_a = \int_0^L \tau_0 dx = \int_0^L 0,323 \sqrt{\frac{\rho \eta V_0^3}{x}} dx = 0,646 \sqrt{\rho \eta V_0^3} L$$

VII.4.- ECUACIONES DE PRANDTL DE LA CAPA LIMITE

Si se supone un fluido incompresible, en movimiento laminar permanente, en flujo bidimensional sobre una pared cualquiera en la que el radio de curvatura es muy superior al espesor de la capa límite, las ecuaciones de Navier-Stokes se simplifican, quedando en la siguiente forma:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{du}{dt} + v \nabla u$$

en la que: $\frac{du}{dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$; $X = 0$ en la dirección del movimiento

La ecuación de continuidad es $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, y como: $v = 0$; $\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$, la ecuación de

Navier-Stokes queda en la forma:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

En el borde de la capa límite se tiene la velocidad \bar{V}_0 del movimiento irrotacional exterior, por lo que aplicando la ecuación de Bernoulli se puede hallar la variación longitudinal de la presión, resultando:

$$\frac{1}{2} \frac{dV_0^2}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{dV_0^2}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$$

Si se introduce la función línea de corriente ψ de la forma: $u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$; $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, la ecuación de continuidad se satisface automáticamente, y sustituyendo estos valores en la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

de aplicación a la obtención de la capa límite laminar sobre un contorno plano.

Ecuación clásica de Kármán.- Los caudales de la cantidad de movimiento, en proyección paralela a la pared, manteniendo la anchura de la capa límite igual a la unidad, son los siguientes:

Sobre (AB): $q_{M(AB)} = q_M$, (entrante)

Sobre (CD): $q_{M(CD)} = q_M + \frac{\partial q_M}{\partial x} dx$, (saliente)

Sobre (BC): $\frac{\partial q}{\partial x} dx V_0$, (entrante)

La variación de la cantidad de movimiento es:

$$-q_M + (q_M + \frac{\partial q_M}{\partial x} dx) - \frac{\partial q}{\partial x} dx V_0 = \frac{\partial q_M}{\partial x} dx - \frac{\partial q}{\partial x} dx V_0$$

El impulso mecánico es:

$$p \delta - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) (\delta + \frac{\partial \delta}{\partial x} dx) - \tau_0 dx = -(\tau_0 + \frac{\partial \tau_0}{\partial x} \delta) dx$$

Igualándolas se obtiene:

$$\frac{\partial q_M}{\partial x} - V_0 \frac{\partial q}{\partial x} = -\tau_0 - \frac{\partial \tau_0}{\partial x} \delta$$

$$\frac{\partial q_M}{\partial x} - V_0 \frac{\partial q}{\partial x} = \left[\begin{array}{l} q_M = (\delta - \delta_1 - \delta_2) V_0^2 \rho ; \quad q = (V_0 \delta - \delta_1) \rho ; \quad \delta - \delta_1 = Cte \\ \frac{\partial q_M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \{ (\delta - \delta_1 - \delta_2) V_0^2 \rho \} = -\frac{\partial \delta_2}{\partial x} V_0^2 \rho + (\delta - \delta_1 - \delta_2) 2 V_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} \rho \\ \frac{\partial q}{\partial x} = \rho (\delta - \delta_1) \frac{\partial V_0}{\partial x} \end{array} \right] =$$

$$= - \frac{\partial \delta_2}{\partial x} V_0^2 \rho + (\delta - \delta_1 - \delta_2) 2 V_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} \rho - \rho (\delta - \delta_1) V_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} = - \tau_0 - \frac{\partial p}{\partial x} \delta =$$

$$= \left| p + \rho \frac{V_0^2}{2} = Cte ; \frac{\partial p}{\partial x} = - \rho V_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} \right| = - \tau_0 + \rho V_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} \delta$$

que simplificada queda en la forma:

$$\tau_0 = \frac{\partial \delta_2}{\partial x} V_0^2 \rho + V_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} \rho (\delta_1 + 2 \delta_2)$$

ecuación que se conoce como ecuación de Kàrmàn, en la que las variables V_0 , δ_1 y δ_2 no dependen más que de x .

VII.5.- ECUACIÓN INTEGRAL DE LA ENERGÍA DE LA CAPA LÍMITE

El Primer Principio de la Termodinámica aplicado a un sistema abierto en régimen estacionario, permite calcular el calor Q puesto en juego en una transformación, en la forma:

$$Q = \Delta i + T + \Delta E_{cinética} + \Delta E_{potencial}$$

e indica que la energía se puede considerar en forma de entalpía, calor o energía cinética, con las mismas unidades que el trabajo de cizalladura o de corte.

A pequeñas velocidades, los términos asociados a la energía cinética y potencial y al trabajo de cortadura son pequeños en comparación con las demás magnitudes, y se pueden despreciar.

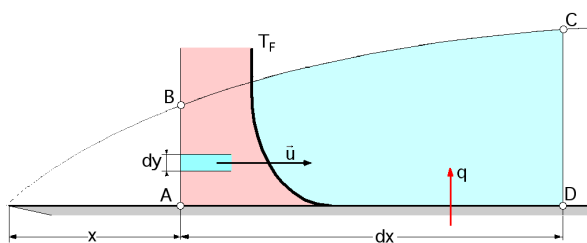


Fig VII.6.- Capa límite térmica

La velocidad a la que la entalpía entra a través de la sección (AB) de la capa límite representada en la Fig VII.6 viene dada por:

$$i_{AB} = m c_p T = c_p \rho \int_0^{\delta_T} u T dy$$

mientras que la velocidad del flujo de entalpía a través de la sección (CD) es:

$$i_{CD} = i_{AB} + \frac{\partial i_{AB}}{\partial x} dx = i_{AB} + c_p \rho \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^{\delta_T} u T dy \right\} dx$$

por lo que dentro de la capa límite quedará:

$$i_{AB} - i_{CD} = - c_p \rho \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^{\delta_T} u T dy \right\} dx$$

La entalpía transportada al interior del volumen de control a través de la superficie (BC), es:

$$\Delta i_{BC} = c_p \rho T_F \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^{\delta_T} u dy \right\} dx$$

El calor conducido a través de la capa límite es:

$$q_k = - k dx \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Sumando todas las contribuciones energéticas, se obtiene la ecuación integral para la conservación de la energía:

$$c_p \rho T_F \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^{\delta_T} u dy \right\} dx - c_p \rho \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^{\delta_T} u T dy \right\} dx - k dx \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$$

Como fuera de la capa límite térmica la temperatura es T_F , sólo se integrará hasta el límite ($y = \delta_T$) de la misma; por lo tanto:

$$c_p \rho T_F \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_T} u dy - c_p \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_T} u T dy - k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_T} (T_F - T) u dy = \frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \alpha \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$$

que es la ecuación integral de la energía de la capa límite laminar para el caso de un flujo de baja velocidad, en la que dx se comporta como un intervalo y es independiente de dy .

Si se utiliza un perfil de velocidades de tercer grado, de la forma:

$$\frac{u}{V_0} = \frac{3y}{2\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3$$

y distribución de temperaturas:

$$\frac{T - T_{pF}}{T_F - T_{pF}} = \frac{T - T_F + T_F - T_{pF}}{T_F - T_{pF}} = \frac{T - T_F}{T_F - T_{pF}} + 1 = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T(x)} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T(x)} \right)^2$$

en la que sustituyendo las condiciones: $\begin{cases} y = 0 ; T = T_{pF} ; \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \\ y = \delta_T ; T = T_F ; \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \end{cases}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \alpha \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} &= (T_{pF} - T_F) V_0 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^3 \right\} \left\{ \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right\} dy = \\ &= (T_F - T_{pF}) V_0 \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{20} \frac{\delta_T^2}{\delta} - \frac{3}{280} \frac{\delta_T^4}{\delta^3} \right) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = (T_F - T_{pF}) \frac{3k}{2\delta_T}$$

resulta:

$$\frac{3}{2} \alpha = V_0 \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{20} \frac{\delta_T^2}{\delta} - \frac{3}{280} \frac{\delta_T^4}{\delta^3} \right) \delta_T = \left| \xi = \frac{\delta_T}{\delta} \right| = V_0 \frac{d}{dx} \left\{ \delta \left(\frac{3}{20} \xi^2 - \frac{3}{280} \xi^4 \right) \right\} \xi \delta$$

En la ecuación de Pohlhausen se demuestra que:

$$\xi = \frac{\delta_T}{\delta} = (Pr)^{-1/3}$$

El valor de Pr es del orden de la unidad para la mayor parte de los gases ($0,6 < Pr < 1$) mientras que para la mayor parte de los líquidos varía en un campo muy grande, con valores elevados para los aceites muy viscosos y bajas temperaturas, y valores muy bajos para los metales líquidos; en consecuencia, cuando:

$$\frac{\delta_T}{\delta} \ll 1 ; \quad \xi \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \xi^4 \ll \xi^2$$

resultando:

$$\frac{3}{2} \frac{\alpha}{V_0} = V_0 \frac{d}{dx} \left(\delta \frac{3}{20} \xi^2 \right) \xi \delta = \frac{3 V_0}{20} \left(\xi^2 \frac{d\delta}{dx} + 2 \xi \delta \frac{d\xi}{dx} \right) \xi \delta \Rightarrow \frac{10}{V_0} \alpha dx = \xi^3 \delta d\delta + 2 \xi^2 \delta^2 d\xi$$

Derivando la solución hidrodinámica

$$\delta^2 = 21,58 \frac{v x}{V_0} \Rightarrow 2 \delta d\delta = 21,58 \frac{v dx}{V_0}$$

y sustituyendo estos valores en la anterior, se obtiene:

$$\frac{10}{V_0} \alpha dx = \xi^3 \frac{10,79}{\delta} \frac{v dx}{V_0} + 2 x 21,58 \xi^2 \frac{v x}{V_0} d\xi \Rightarrow \xi^3 + 4 x \xi^2 \frac{d\xi}{dx} = \frac{13}{14} \frac{\alpha}{v} = \frac{13}{14 (Pr)}$$

La solución general es:

$$\xi^3 = C x^{-3/4} + \frac{10}{10,79 Pr} = C x^{-3/4} + \frac{0,92678}{Pr}$$

La solución exacta es:

$$\xi^3 = C x^{-3/4} + \frac{13}{14 Pr} = C x^{-3/4} + \frac{0,92857}{Pr}$$

y con la condición:

$$x = x_i ; \quad \xi^2 = \left(\frac{\delta T}{\delta} \right)^3 \Rightarrow 0 ; \quad C = - \frac{13}{14} \frac{\sqrt[3]{x_i}}{Pr}$$

resulta, Fig VII.7:

$$\xi = 0,976 \sqrt[3]{\frac{1 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^{3/4}}{Pr}}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} h_{Cx} = \frac{3 k}{2 \delta T} &= \frac{\frac{3 k}{2}}{0,976 \delta \sqrt[3]{\frac{1 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^{3/4}}{Pr}}} = \left| \delta = \frac{4,64 x}{\sqrt{Re_x}} \right| = \frac{\frac{3 k}{2}}{0,976 \frac{4,64 x}{\sqrt{Re_x}} \sqrt[3]{\frac{1 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^{3/4}}{Pr}}} = \\ &= \frac{3 k}{2 x} \frac{\sqrt[3]{Pr} \sqrt{Re_x}}{0,976 x 4,64 \sqrt[3]{1 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^{3/4}}} = 0,332 k \frac{1}{\sqrt[3]{1 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^{3/4}}} \frac{\sqrt[3]{Pr} \sqrt{Re_x}}{x} \\ Nu_x = \frac{h_{Cx} x}{k} &= \frac{0,332 \sqrt[3]{Pr} \sqrt{Re_x}}{\sqrt[3]{1 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^{3/4}}} \end{aligned}$$

De haber considerado de partida la ecuación de tercer grado, se hubiera obtenido:

$$Nu_x = \frac{0,323 \sqrt[3]{Pr} \sqrt{Re_x}}{\sqrt[3]{1 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^{3/4}}}$$

Para $\frac{x_i}{x} = 0$ se obtiene la **ecuación de Pohlhausen**:

$$Nu_x = 0,332 \sqrt{Re_x} Pr^{1/3}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\xi = \frac{0,976}{\sqrt[3]{Pr}} = \frac{\delta_T}{\delta} ; \quad \delta_T = \frac{0,976}{\sqrt[3]{Pr}} \delta = 4,534 \frac{x}{\sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr}}$$

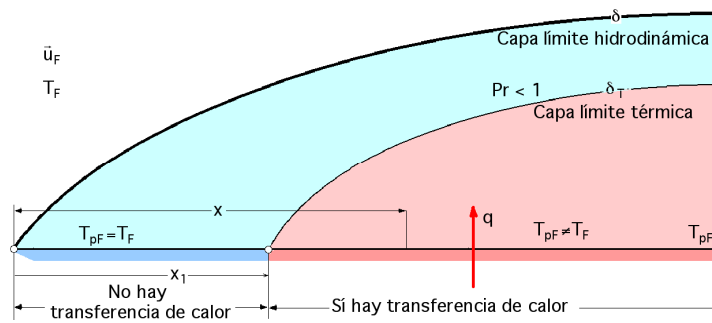
el coeficiente medio de transmisión de calor por convección h_C en el intervalo $(0 \leq x \leq L)$ a lo largo de la superficie plana es:

$$h_C = \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=L} h_{Cx} dx = 2 h_{Cx}|_{x=L} = \frac{0,664 k \sqrt{Re_L} Pr^{1/3}}{L} \quad (\text{exacto})$$

$$h_C = \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=L} h_{Cx} dx = 2 h_{Cx}|_{x=L} = \frac{0,646 k \sqrt{Re_L} Pr^{1/3}}{L} \quad (\text{ecuación de tercer grado})$$

El calor transmitido desde la placa, de anchura unidad, al fluido, es:

$$Q = L h_C (T_{pF} - T_F)$$



Si se considera existen dos zonas longitudinales sobre la placa, perfectamente diferenciadas, una sin aporte de calor, Fig VII.7, resulta:

$$\text{Para: } \begin{cases} x < x_1 ; & Q = 0 \\ x > x_1 ; & Q = 0,323 \frac{k_F}{x} Pr^{1/3} \sqrt{Re_x} \frac{\Delta T}{\sqrt[3]{1 - (\frac{x_1}{x})^{3/4}}} \end{cases} \quad \text{con, } \Delta T = T_{pF} - T_F$$

Para una zona de la placa comprendida entre $(x_1 < x < x_2)$ a la que se aplica un flujo de calor Q , Fig VII.8, se tiene:

$$Q = 0,323 \frac{k_F}{x} Pr^{1/3} \sqrt{Re_x} \left(\frac{\Delta T}{\sqrt[3]{1 - (\frac{x_1}{x})^{3/4}}} + \frac{-\Delta T}{\sqrt[3]{1 - (\frac{x_2}{x})^{3/4}}} \right)$$

observándose que el flujo de calor en la región $(x_1 > x_2)$ es (-) lo cual significa que en la citada sección la pared reabsorbe parte del calor comunicado a la capa límite en la región $(x_1 < x < x_2)$.

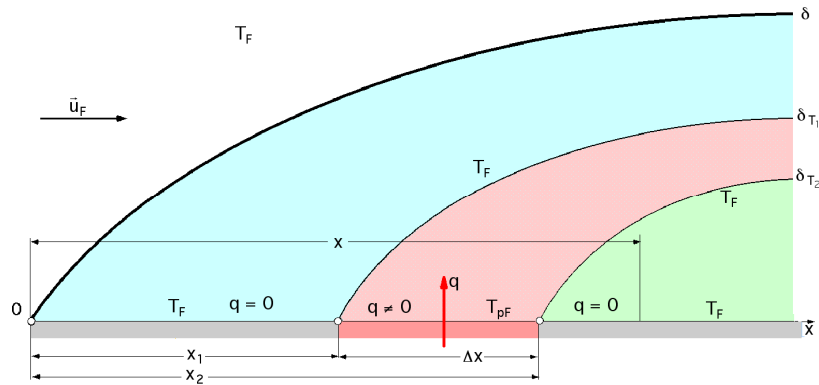


Fig VII.8 - Placa con una capa límite laminar y dos capas límite térmicas

Relación entre C_x y h_{C_x} en flujo laminar sobre placa plana.- A partir de la expresión exacta de Blasius para el coeficiente de arrastre local C_x a lo largo de una placa plana:

$$\frac{C_x}{2} = \frac{0,332}{\sqrt{Re_x}}$$

en la que se ha supuesto que para el espesor δ de la capa límite el gradiente de presiones es cero y las propiedades del fluido constantes, y del número de Nu local para el flujo laminar, (Pohlhausen):

$$Nu_x = 0,332 \sqrt{Re_x} Pr^{1/3}$$

Como el número de Stanton local St_x es:

$$St_x = \frac{h_{C_x}}{\rho c_p V_0} = \frac{Nu_x}{Pr Re_x} = \frac{0,332}{Pr^{2/3} \sqrt{Re_x}} = \frac{0,332 C_x}{Pr^{2/3} 2 \times 0,332} = \frac{C_x}{2 Pr^{2/3}} ; \frac{C_x}{2} = St_x Pr^{2/3} ; Pr > 0,5$$

que se conoce como analogía de Reynolds-Colburn que relaciona el coeficiente de arrastre local C_x con el número de Stanton St_x para flujo laminar a lo largo de una placa plana.

Como es mucho más fácil hacer medidas de la fuerza de arrastre que de la transferencia de calor, para el caso de valores medios se puede poner:

$$\frac{C_w}{2} = St Pr^{2/3} = \frac{h_C}{\rho c_p V_0} Pr^{2/3}$$

en la que C_w es el coeficiente de arrastre medio y St el número de Stanton medio.

Teniendo en cuenta lo anterior, la fuerza de arrastre \bar{F}_a queda en la forma:

$$F_a = \frac{\rho (L a) C_w V_0^2}{2} = \frac{\rho (L a) h_C V_0^2}{\rho c_p V_0} = (L a) \frac{h_C}{c_p} V_0$$

VII.6.- CAPA LIMITE TURBULENTO PARA PLACA PLANA

No existe una teoría exacta que permita estudiar la capa límite turbulenta; sin embargo sí existen modelos empíricos que han permitido la obtención de soluciones numéricas de las ecuaciones de la capa límite. El reparto de velocidades para la placa plana es aproximadamente logarítmico, habiéndose obtenido al efecto los siguientes resultados experimentales:

Para: $10^5 < Re < 10^7$; $\frac{u}{V_0} = m\sqrt{\frac{y}{\delta}}$, con: $m = 7$, $F = \frac{9}{7}$

El valor de $\tau_0 = \rho \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^\delta u (V_0 - u) dy \right\}$ se puede aplicar también al régimen turbulento, por cuanto en su demostración no se ha fijado la forma de la distribución de velocidades en la capa límite, por lo que la distribución de velocidades $\frac{u}{V_0}$ puede ser.

- Para placa plana : $\frac{u}{V_0} = m\sqrt{\frac{y}{\delta}}$

- Para flujo turbulento por el interior de tuberías, (Nikuradse): $\frac{u}{V_{m\acute{a}x}} = m\sqrt{\frac{y}{R}}$

En estas circunstancias Blasius dedujo experimentalmente que:

$$\tau_0 = 0,0288 \rho V_0^2 \sqrt[4]{\frac{\nu}{\delta V_0}} \text{ , con: } 5 \cdot 10^5 < Re < 10^7$$

Siguiendo el mismo método que para el cálculo de la capa límite laminar:

$$\tau_0 = \rho V_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^\delta \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0} \right) dy \right\} = \rho V_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta \sqrt[7]{\frac{y}{\delta}} \left\{ 1 - \sqrt[7]{\frac{y}{\delta}} \right\} dy \right] = \frac{7}{72} \rho V_0^2 \frac{d\delta}{dx}$$

Igualando las expresiones:

$$\frac{7}{72} \rho V_0^2 \frac{d\delta}{dx} = \tau_0 = 0,0228 \rho V_0^2 \sqrt[4]{\frac{\nu}{\delta V_0}}$$

se obtiene:

$$\sqrt[4]{\delta} d\delta = 0,234 \sqrt[4]{\frac{\nu}{V_0}} dx \quad ; \quad \delta^{5/4} = 0,292 \sqrt[4]{\frac{\nu}{V_0}} x \quad ; \quad \frac{\delta}{x} = \frac{0,376}{\sqrt[5]{Re_x}}$$

en donde se ha supuesto que la capa límite es turbulenta en el total de la longitud de la placa L de forma que para $(x = 0, \delta = 0)$.

El esfuerzo cortante es:

$$\tau_0 = 0,0228 \rho V_0^2 \sqrt[4]{\frac{\nu}{\delta V_0}} = 0,0228 \rho V_0^2 \sqrt[4]{\frac{\nu}{V_0 \frac{0,376 x}{\sqrt[5]{Re_x}}}} = 0,029 \rho V_0^2 \sqrt[5]{\frac{\nu}{x V_0}}$$

La fuerza de arrastre F_a por unidad de anchura de la placa es:

$$F_a = \int_0^L \tau_0 dx = 0,036 \frac{\rho V_0^2 L}{\sqrt[5]{Re_L}} \quad ; \quad C_x = \frac{0,0576}{\sqrt[5]{Re_x}} \quad ; \quad C_w = \frac{0,072}{\sqrt[5]{Re_L}} = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho V_0^2 L}$$

ecuaciones válidas en el intervalo en que lo es la ecuación de Blasius.

Para el número de Re crítico, $Re_C = 5 \cdot 10^5$, resulta:

$$C_w = \frac{0,072}{\sqrt[5]{Re_L}} = 0,00334 \frac{x_C}{L} \approx \frac{0,072}{\sqrt[5]{Re_L}} = \frac{1700}{Re_L}$$

Para valores de Re comprendidos en el intervalo, $5 \cdot 10^5 < Re_x < 10^9$, resulta:

$$C_{wx} = \frac{0,455}{(\log_{10} Re_L)^{2,58}}$$

El coeficiente de arrastre, que es exacto para toda la placa, y que incluye las zonas laminar y turbulenta, se determina mediante las expresiones:

$$C_w = \frac{1,328}{\sqrt{Re_C}} \frac{Re_C}{Re_L} + 0,074 Re_L^{-1/5} \left\{ 1 - \left(\frac{Re_C}{Re_L} \right)^{4/5} \right\} ; \quad Re_L > 10^7$$

$$C_w = \frac{1,328}{\sqrt{Re_C}} \frac{Re_C}{Re_L} + \frac{0,523}{\ln^2(0,06 Re_L)} - \left(\frac{Re_C}{Re_L} \right) \frac{0,523}{\ln^2(0,06 Re_C)} ; \quad Re_L < 10^7$$

VII.7.- DESPRENDIMIENTO DE LA CAPA LIMITE

Cuando el gradiente de presiones se mantiene nulo a lo largo de la placa plana, la capa límite se desarrolla a lo largo de la misma, independientemente de su longitud.

Pero si el gradiente de presiones es *adverso*, la presión aumenta en el sentido de la corriente, y el espesor de la capa límite crece rápidamente. Por otro lado, el gradiente de presión adverso junto con el esfuerzo cortante en la pared, hacen que disminuya la cantidad de movimiento dentro de la capa límite y, si ambos actúan a lo largo de una distancia suficiente, el fluido de la capa límite se irá frenando hasta alcanzar el reposo; en este instante, la línea de corriente que coincide con la pared se aleja de la superficie a partir del punto de separación, conociéndose este fenómeno como *desprendimiento de la capa límite*.

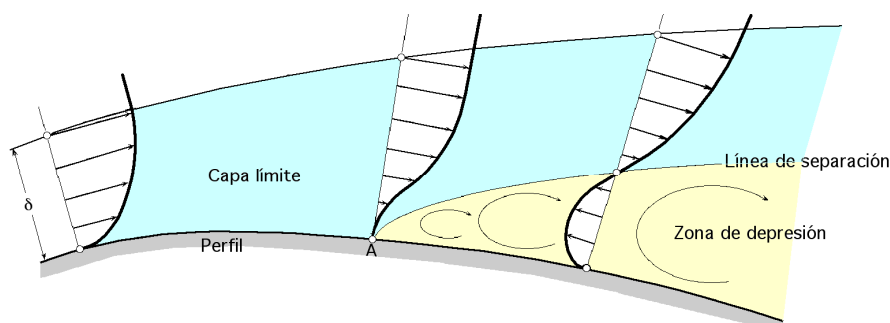


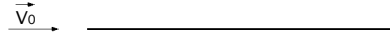
Fig VII.9.- Desprendimiento de la capa límite

El fenómeno se acentúa cuando el perfil es un conducto divergente; el flujo en las proximidades del contorno se va frenando continuamente hasta alcanzar el punto A de la Fig VII.9, en el que la velocidad se hace cero. La forma del contorno puede exigir una disminución mayor de la velocidad, cosa imposible, por lo que el fluido se separará de él, produciéndose al mismo tiempo un contraflujo originado por el gradiente de presiones adverso, es decir, aguas abajo del punto de desprendimiento se origina una zona de bajas presiones, que provocan la aparición de una fuerza depresiva dirigida en el sentido de la corriente, denominada *Resistencia de forma*, por depender hasta cierto punto de la geometría del perfil.

Tabla VII.2.- Coeficientes de arrastre C_w de algunos perfiles inmersos en una corriente fluida de velocidad \vec{V}_0

$$F_a = \frac{C_w \rho V_0^2 A_{Frontal}}{2}$$

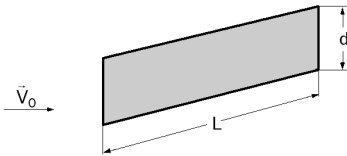
a) Placa plana paralela a la corriente



Régimen laminar: $C_w = \frac{1,33}{\sqrt{Re}}$

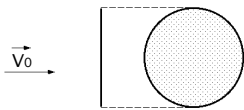
$$Re < 10^7 \Rightarrow C_w = \frac{0,074}{\sqrt[5]{Re}} ; Re > 10^7 \Rightarrow C_w = \frac{0,455}{(\log_{10} Re)^{2,58}}$$

b) Placa plana perpendicular a la corriente, $Re > 10^3$



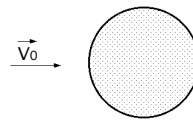
L/d	1	5	10	20	30	∞
C_w	1,18	1,2	1,3	1,5	1,6	1,95

c) Disco circular normal a la corriente



$$Re > 10 ; C_w = 1,17$$

d) Esfera

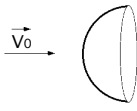


$$Re < 1 \Rightarrow C_w = 24 \sqrt{Re}$$

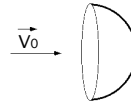
$$10^3 < Re < 3 \cdot 10^5 \Rightarrow C_w = 0,47$$

$$Re > 3 \cdot 10^5 \Rightarrow C_w = 0,2$$

e) Hemisferio hueco

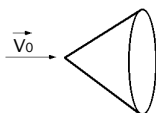


$$10^4 < Re < 10^6 \Rightarrow C_w = 0,34$$



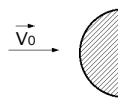
$$10^4 < Re < 10^6 \Rightarrow C_w = 1,42$$

f) Cono de 60°

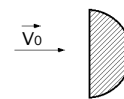


$$Re = 10^5 ; C_w = 0,5$$

g) Semicilindro

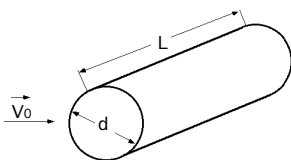


$$10^4 < Re < 10^6 ; C_w = 0,42$$



$$10^4 < Re < 10^6 ; C_w = 1,17$$

h) Cilindro normal a la corriente



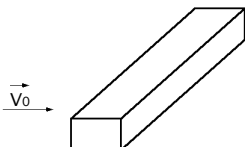
$$Re < 0,2 ; C_w = \frac{8 \pi}{Re (2,2 - \lg_{10} Re)}$$

$$10^3 < Re < 10^5$$

$$Re > 5 \cdot 10^5$$

L/d	1	5	10	20	30	∞	L/d	5	∞
C_w	0,63	0,8	0,83	0,93	1	1,2	C_w	0,35	1,6

i) Prisma

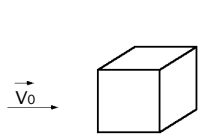


$$Re = 3,5 \cdot 10^4 ; C_w = 2$$

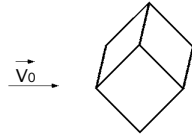


$$10^4 < Re < 10^5 ; C_w = 1,6$$

j) Cubo

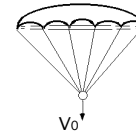


$Re = 10^5 ; C_w = 1,07$



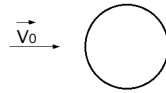
$Re = 10^5 ; C_w = 0,81$

k) Paracaídas (Baja porosidad)



$Re = 10^5 ; C_w = 1,2$

l) Sólidos de revolución elípticos



Relación 1 / 1

Régimen laminar, $C_w = 1,20$

Régimen turbulento, $C_w = 0,30$



Relación 2 / 1

Régimen laminar, $C_w = 0,60$

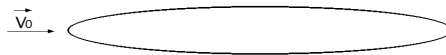
Régimen turbulento, $C_w = 0,20$



Relación 4 / 1

Régimen laminar, $C_w = 0,35$

Régimen turbulento, $C_w = 0,15$

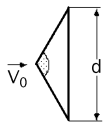


Relación 8 / 1

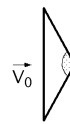
Régimen laminar, $C_w = 0,25$

Régimen turbulento, $C_w = 0,10$

m) Sólidos de revolución triangulares



$120^\circ ; Re > 10.000 ; C_w = 1,72$



$120^\circ ; Re > 10.000 ; C_w = 2$



$60^\circ ; Re > 10.000 ; C_w = 1,72$



$60^\circ ; Re > 10.000 ; C_w = 1,39$

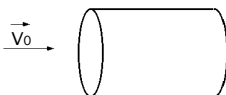


$30^\circ ; Re > 100.000 ; C_w = 1$



$30^\circ ; Re > 100.000 ; C_w = 1,8$

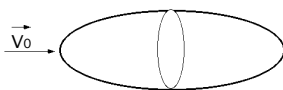
n) Cilindro de sección lenticular



$Re > 10^3$

L/d	0,5	1	2	4	8
C_w	1,15	0,9	0,85	0,87	0,99

o) Elipsoide



Relación $L/d = 0,75$

Régimen laminar, $C_w = 0,50$

Régimen turbulento, $C_w = 0,20$

Relación $L/d = 1,00$

Régimen laminar, $C_w = 0,47$

Régimen turbulento, $C_w = 0,20$

Relación $L/d = 2,00$

Régimen laminar, $C_w = 0,27$

Régimen turbulento, $C_w = 0,13$

Relación $L/d = 4,00$

Régimen laminar, $C_w = 0,25$

Régimen turbulento, $C_w = 0,1$

Relación $L/d = 8,00$

Régimen laminar, $C_w = 0,20$

Régimen turbulento, $C_w = 0,08$