IX.- CALCULO DE TUBERÍAS

pfernandezdiez.es

IX.1.- CALCULO DEL DIÁMETRO DE UNA CONDUCCIÓN

La pérdida total de carga P se puede poner en la forma:

$$P = \frac{\lambda}{d} \frac{u^2}{2g} L + \sum \xi \frac{u^2}{2g} = (\frac{\lambda L}{d} + \sum \xi) \frac{u^2}{2g} = \left| u = \frac{Q}{\Omega} = \frac{4Q}{\pi d^2} \right| = \frac{\lambda L}{2g} \frac{16 Q^2}{\pi^2 d^5} + \frac{1}{2g} \sum \xi \frac{16 Q^2}{\pi^2 d^5}$$

$$2 g P \pi^2 d^5 = 16 \lambda L Q^2 + 16 \sum Q^2 \xi d \quad ; \quad d^5 - \frac{8 Q^2 \sum \xi}{g P \pi^2} d - \frac{8 \lambda L Q^2}{g P \pi^2} = 0 \quad ; \quad d^5 - E d - F = 0$$

Diámetro más económico de una conducción.- Cuando se construye una conducción, a la hora de elegir el diámetro de la misma, pueden suceder dos casos:

a) Si se toma un diámetro pequeño, resultará una velocidad grande, por lo tanto, una mayor pérdida de carga debida al rozamiento, para un mismo caudal.
b) Si se toma un diámetro grande, la velocidad será menor, pero el coste de la instalación será mayor

En consecuencia, hay que encontrar una solución que tenga en cuenta estas circunstancias, y que haga la instalación lo más económica posible.

Para ello consideraremos los siguientes parámetros:

G, es el costo total de la instalación de maquinaria y construcción.
P_2, es el precio por unidad de superficie instalada, de la forma, L d
P_1, es el precio de la unidad de potencia del grupo de bombeo
L, es la longitud de la tubería y d su diámetro
N, es la potencia de la bomba

En consecuencia, el gasto total se puede poner en la forma:

$$G = P_1 N + P_2 d L$$

La potencia N del grupo de bombeo es:

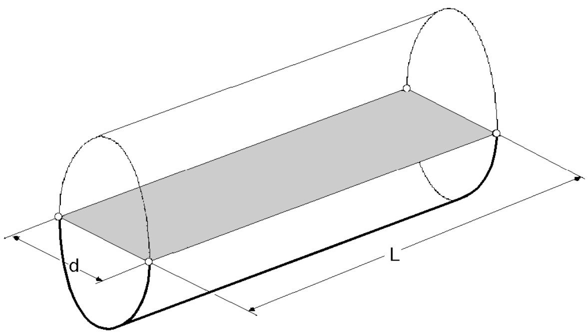

Fig IX.1

$$N = \frac{\lambda Q (H + P)}{75\ \eta} = \frac{\lambda Q (H + \frac{8 Q^2 \lambda L}{\pi^2 g d^5})}{75\ \eta}$$

y el costo G de la instalación de maquinaria, construcción y mantenimiento:

$$G = \frac{\lambda Q (H + \frac{8 Q^2 \lambda L}{\pi^2 g d^5})}{75\ \eta} P_1 + d L P_2$$

Para hallar el diámetro más económico, derivamos la ecuación anterior respecto de d y lo igualamos a cero, obteniéndose:

$$\frac{dG}{dd} = \frac{\gamma Q (- \frac{40 Q^2 \lambda L}{g \pi^2 d^6})}{75\ \eta} P_1 + L P_2 = 0 \ ; \ d = \sqrt[6]{\frac{40\ Q^3 \lambda \gamma}{75\ \eta g \pi^2} \frac{P_1}{P_2}}$$

Para, γ = 1000 kg/m³, resulta:

$$d = \sqrt[6]{\frac{5{,}51\ Q^3\ \lambda}{\eta} \frac{P_1}{P_2}} = 1{,}329 \sqrt[6]{\frac{\lambda P_1}{\eta P_2}} \sqrt{Q} = \varphi \sqrt{Q}$$

que se conoce como fórmula de Bress y en la que los valores de P_1 y P_2 hay que tomarlos convenientemente actualizados.

El proceso a seguir para hallar el diámetro más económico se puede resumir en lo siguiente:

1) Se fija el caudal Q y se elige una velocidad $\vec{u}$ entre unos límites razonables.

2) Con estos datos se calcula el diámetro d

3) Se determinan las pérdidas de carga continuas y accidentales; si resultan exageradas, se disminuye la velocidad y se rehacen los cálculos.

El problema se puede resolver también gráficamente, representando las curvas correspondientes a los gastos de instalación y explotación.

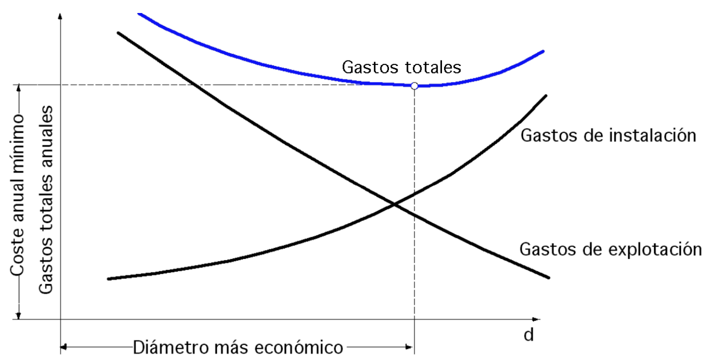

Fig IX.2.- Diámetro más económico de una conducción

Los gastos de instalación comprenden:

a) Costo de la tubería

b) Costo del desmonte

c) Costo de los terraplenes
d) Costo de los accesorios
e) Costo del grupo de bombeo.

Los gastos de explotación comprenden:

- Gastos de conservación de la tubería
- Potencia consumida por el grupo de bombeo.

Conocidas las curvas, se suman sus ordenadas, y el mínimo se corresponde con el diámetro ***d*** más económico, como se muestra en la Fig IX.2.

IX.2.- PERDIDA UNIFORME DE CAUDAL A LO LARGO DE UNA CONDUCCIÓN

Supongamos que un fluido recorre una conducción de sección constante; para un elemento infinitesimal de la misma, de longitud *dx*, la pérdida de carga viene dada por la expresión:

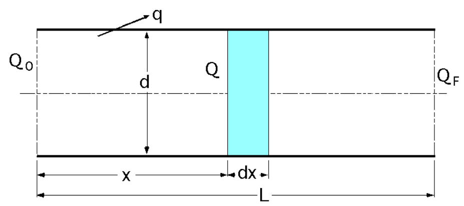

Fig IX.3

$$dP = J\,dx = k\,Q^2\,dx$$

y la pérdida de carga continua total, entre los límites 0 y L:

$$P = \int_0^L k\,Q^2\,dx$$

Si suponemos que Q_0 es el caudal que entra en la conducción, y que se pierden *q* m3/seg por metro de longitud de tubería, el caudal Q que se tiene a la distancia *x* del origen es:

$$Q = Q_0 - q\,x$$

mientras que el caudal al final de la conducción es:

$$Q_F = Q_0 - q\,L \quad \Rightarrow \quad q\,L = Q_0 - Q_F$$

En consecuencia, se puede poner:

$$P = \int_0^L k\,Q^2 dx = k\int_0^L (Q_0 - q\,x)^2 dx = k\,(Q_0^2\,L - 2\,Q_0\,q\,\frac{L^2}{2} + q^2\,\frac{L^3}{3}) = \left|q = \frac{Q_0 - Q_F}{L}\right| =$$

$$= k\,L\,\{Q_0^2 + \frac{(Q_0 - Q_F)^2}{3} - Q_0\,(Q_0 - Q_F)\} = \frac{k\,L}{3}\,(Q_0^2 + Q_0 Q_F + Q_F^2)$$

Si $Q_F = 0$, o lo que es lo mismo, si en el extremo final la conducción ha perdido todo el caudal, la pérdida de carga es:

$$P' = \frac{K\,L\,Q_0^2}{3}$$

que es la tercera parte de la pérdida de carga $P = k\,Q_0^2\,L$ para el caso de que la conducción transporte a lo largo de su longitud L todo el caudal Q_0 sin perder nada.

IX.3.- TUBERÍA CON TOMA INTERMEDIA

Sea la conducción (ab) de longitud *l* y diámetro *d* constante, Fig IX.4, que parte de un depósito A, de forma que en el extremo *b* de la misma se tiene un caudal Q.

La línea de niveles piezométricos es la (DB) y, según ella, el valor de la pérdida de carga P en el extremo B, es:

$$P = J\,l = k\,Q^2\,l = k'\,\frac{Q^2}{d^5}\,l$$

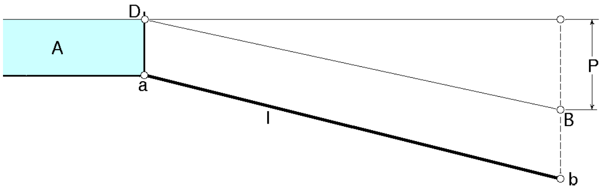

Fig IX.4

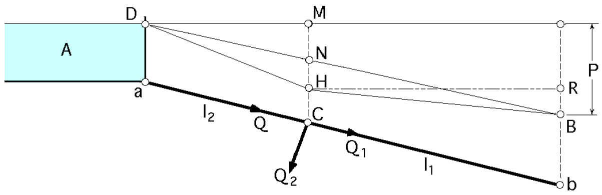

Fig IX.5.- Tubería con toma intermedia

Supongamos ahora que a una distancia l_2 del punto a, (comienzo de la conducción), se realiza una toma intermedia en C; el diámetro d se mantiene constante en los tramos de tubería (aC) y (Cb). En estas circunstancias en el nudo C se tienen los caudales salientes que llamaremos Q_1 y Q_2. Para hallar la pérdida de carga total, se puede aplicar la fórmula de Darcy a cada tramo, de forma que la suma de las pérdidas de carga en el tramo de longitud l, sea igual a la suma de las pérdidas de carga correspondientes a los tramos l_1 y l_2, por lo que:

$$P = k'\,\frac{l_1}{d^5}\,Q_1^2 + k'\,\frac{l_2}{d^5}\,(Q_1 + Q_2)^2 = \frac{k'}{d^5}\,\{l_1 Q_1^2 + l_2 (Q_1 + Q_2)^2\}$$

de la que se deduce:

$$d = \sqrt[5]{\frac{l_1 Q_1^2 + l_2 (Q_1 + Q_2)^2}{P}\,k'}$$

A su vez, como el valor de P es el mismo para ambos casos, considerando: $Q = Q_1 + Q_2$, resulta:

$$\frac{k'}{d^5}\{l_1\,Q_1^2 + l_2\,(Q_1 + Q_2)^2\} = k'\,\frac{Q^2}{d^5}\,l$$

$$l\,Q^2 = l_1\,Q_1^2 + l_2\,(Q_1 + Q_2)^2 = Q_1^2\,(l_1 + l_2) + 2\,l_2\,Q_1\,Q_2 + l_2\,Q_2^2$$

ecuación de segundo grado en Q_1, cuyo valor es:

$$Q_1^2 + \frac{2\,l_2\,Q_2}{l}\,Q_1 + \left(\frac{l_2\,Q_2^2}{l} - Q^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = -\,\frac{l_2\,Q_2}{l} \pm Q\,\sqrt{\frac{l_2}{l}\left(\frac{Q_2}{Q}\right)^2 \left(\frac{l_2}{l} - 1\right) + 1}$$

Casos particulares:

a) Si Q_2 es muy pequeño frente a Q, el valor del caudal: $Q_1 = -\,\frac{l_2\,Q_2}{l} + Q$, que nos dice que para igual pérdida de carga, el caudal Q_1 en el extremo b de la tubería es Q menos una fracción de Q_2 que depende de la posición de la toma intermedia.

b) Si la toma está en la posición media de la tubería $l_2 = \frac{l}{2}$, el caudal es: $Q_1 = Q - \frac{Q_2}{2}$

c) Si se cierra la válvula en C la línea de niveles piezométricos será la (DNB) y la carga en C será (MN); al abrir dicha válvula C, la carga en ese punto disminuirá hasta H. Todo el caudal que llegue a C *saldrá por la toma intermedia cuando se cumpla que la línea de niveles piezométricos del tramo (Cb) es horizontal.*

d) Si la llave en C está cerrada:

$$P = k' \frac{Q^2}{d^5} l \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{P d^5}{k' l}}$$

Si la llave en C está abierta:

$$P_{2(aC)} = \frac{k' l_2 (Q_1 + Q_2)^2}{d^5} = MH$$

$$P_{1(Cb)} = \frac{k' l_1 Q_1^2}{d^5} = P - P_2 = RB$$

En todo el proceso se ha supuesto que la tubería es de gran longitud, por lo que no se han tenido en cuenta las pérdidas accidentales.

IX.4.- TUBERÍA CON TOMA INTERMEDIA ENTRE DOS DEPÓSITOS

Sea la conducción (BAC) que une los depósitos B y C a diferentes niveles, y en ella una toma intermedia A, con llave, para regular el consumo por (AD). Para hallar la expresión que permite calcular el caudal Q que circula entre B y C, podemos utilizar la ecuación de Darcy, en la forma:

$$Q = \Omega u = \left| J = \frac{\lambda u^2}{2 g d} \; ; \; u = \sqrt{\frac{2 g d J}{\lambda}} \right| = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2 g d J}{\lambda}} = 3,477 \sqrt{\frac{J d^5}{\lambda}}$$

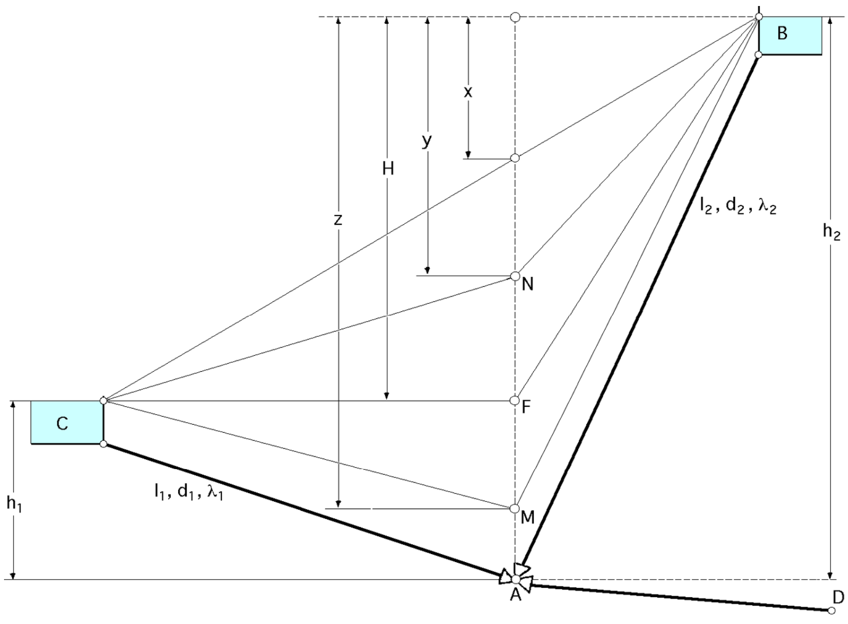

Fig IX.6.- Tubería con toma intermedia entre dos depósitos

a) Si se supone que: $\begin{cases} d_1 = d_2 = d \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \end{cases}$, se pueden presentar varios casos, como:

a-1) Llave cerrada:

$$J = \frac{H}{l_1 + l_2} \Rightarrow Q = 3,477 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{H d^5}{l_1 + l_2}}$$

a-2) Llave muy abierta:

$$Q = 3{,}477\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\sqrt{\frac{z}{l_2}\, d^5} + \sqrt{\frac{z - H}{l_1}\, d^5}\right)$$

en la que el depósito C actúa como depósito de socorro del B, estando la toma alimentada por los dos depósitos, y en donde z es la carga para el ramal (AB) y $(z - H)$ la carga para el ramal (AC).

b) Si se supone que $\begin{cases} d_1 \cong d_2 \\ \lambda_1 \cong \lambda_2 \end{cases}$, se obtiene en forma parecida al apartado anterior:

b-1) La llave A está cerrada, por lo que del depósito B fluye al depósito C, un caudal Q de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} J_1 = \dfrac{H - x}{l_1} \\ J_2 = \dfrac{x}{l_2} \end{array}\right\} \Rightarrow\ Q = 3{,}477\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\sqrt{\frac{H - x}{l_1}\, d_1^5} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\sqrt{\frac{x}{l_2}\, d_2^5}\right)$$

b-2) La llave A comienza a abrirse, arrojando por (AD) un caudal q; habrá un descenso en el nivel piezométrico hasta N, siendo la línea piezométrica (BNC); el depósito C recibirá un caudal menor.

El caudal saliente por la toma es:

$$q = Q_2 - Q_1 = 3{,}477\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\sqrt{\frac{y}{l_2}\, d_2^5} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\sqrt{\frac{H - y}{l_1}\, d_1^5}\right)$$

b-3) La llave A se sigue abriendo hasta que el punto F de la línea piezométrica esté en el plano horizontal del nivel de liquido del depósito más bajo C; el valor del caudal que el depósito B proporciona y que es el que sale por la toma, por cuanto el depósito C no interviene, es:

$$q = Q_2 = \frac{3{,}477}{\sqrt{\lambda_2}}\sqrt{\frac{H}{l_2}\, d_2^5}$$

existiendo un equilibrio entre el depósito C y la toma intermedia.

b-4) La llave A se sigue abriendo, aumentando el caudal que sale por la toma intermedia; el nivel piezométrico de la toma A llegará hasta un punto por debajo del plano horizontal del nivel del liquido del depósito C, punto M, y de esta forma el depósito C actuará como un depósito de socorro para el B, estando por lo tanto, alimentada la toma por los dos depósitos.

El caudal que proporciona la llave, con z y $(z - H)$ las pérdidas de carga para los ramales (BA) y (CA), respectivamente, es:

$$q = Q_1 + Q_2 = 3{,}477\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\sqrt{\frac{z - H}{l_1}\, d_1^5} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\sqrt{\frac{z}{l_2}\, d_2^5}\right)$$

IX.5.- EL PROBLEMA DE LOS TRES DEPÓSITOS

El problema de los tres depósitos es un caso de ramificación única, y consiste en tres depósitos a distintos niveles, unidos por las conducciones (AM), (BM) y (CM), que forman un sistema de circulación en Y. Se fija un sentido en la circulación, el que parezca más lógico, y si una vez resuelto el problema aparece signo contrario al propuesto, se invierte el sentido; supondremos que:

$Q_3 = Q_1 + Q_2$

Para su estudio aplicaremos Bernoulli entre los tramos de tuberías (AD), (BE), y (CF), estando los puntos D, E y F muy próximos al de confluencia M, $(z_M = z_E = z_D = z_F)$ y $(p_M = p_E = p_D = p_F)$, pero lo suficientemente alejados de él, como para considerar a la circulación todavía sin perturbar por el efecto de la válvula M.

Las pérdidas de carga para cada tramo considerado son:

$$P_1 = k_1\, Q_1^2 + k_1'\, Q_1^2 \sum \xi_1 = Q_1^2\, (k_1 + k_1' \sum \xi_1)$$
$$P_2 = k_2\, Q_2^2 + k_2'\, Q_2^2 \sum \xi_2 = Q_2^2\, (k_2 + k_2' \sum \xi_2)$$
$$P_3 = k_3\, Q_3^2 + k_3'\, Q_3^2 \sum \xi_3 = Q_3^2\, (k_3 + k_3' \sum \xi_3)$$

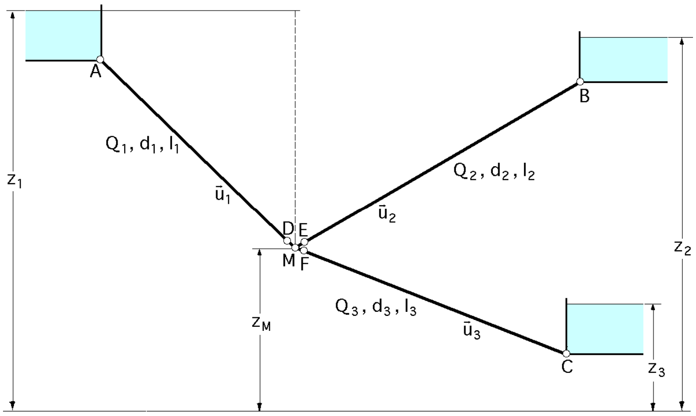

Fig IX.7.- El problema de los tres depósitos

en las que en el sumatorio de los coeficientes de pérdidas accidentales se han incluido todo tipo de pérdidas en codos, curvas, entrada y salida de las tuberías, etc.

Aplicando Bernoulli entre los depósitos y el punto M, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Tramo (AM):}\;\; z_1 + 0 + 0 = z_M + \dfrac{p_M}{\gamma} + \dfrac{u_1^2}{2g} + Q_1^2\, (k_1 + k_1' \sum \xi_1) \\ \textit{Tramo (BM):}\;\; z_2 + 0 + 0 = z_M + \dfrac{p_M}{\gamma} + \dfrac{u_2^2}{2g} + Q_2^2\, (k_2 + k_2' \sum \xi_2) \\ \textit{Tramo (CM):}\;\; z_M + \dfrac{p_M}{\gamma} + \dfrac{u_3^2}{2g} = z_3 + 0 + 0 + Q_3^2\, (k_3 + k_3' \sum \xi_3) \end{array}\right\}$$

Sumando las ecuaciones primera y segunda, a la tercera, se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 - z_3 = \dfrac{u_1^2}{2g} - \dfrac{u_3^2}{2g} + Q_1^2\, (k_1 + k_1' \sum \xi_1) + Q_3^2\, (k_3 + k_3' \sum \xi_3 \\ z_2 - z_3 = \dfrac{u_2^2}{2g} - \dfrac{u_3^2}{2g} + Q_2^2\, (k_2 + k_2' \sum \xi_2) + Q_3^2\, (k_3 + k_3' \sum \xi_3 \end{array}\right\}$$

Aplicando de nuevo Bernoulli en el nudo M, en los tramos (DMF) y (EMF), se obtiene:

$$z_M + \frac{p_M}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_F + \frac{p_F}{\gamma} + \frac{u_3^2}{2g} + \textit{Pérdidas en M} \quad \Rightarrow \quad \textit{Pérdidas en M} = \frac{u_1^2 - u_3^2}{2g}$$

$$z_M + \frac{p_M}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} = z_F + \frac{p_F}{\gamma} + \frac{u_3^2}{2g} + \textit{Pérdidas en M} \quad \Rightarrow \quad \textit{Pérdidas en M} = \frac{u_2^2 - u_3^2}{2g}$$

y sustituyendo estos resultados en las ecuaciones que proporcionan (z_1 - z_3) y (z_2 - z_3), resulta:

$z_1 - z_3 = \sum$ *pérdidas en el tramo (AC)*

$z_1 - z_2 = \sum$ *pérdidas en el tramo (AB)*

que junto con $\sum Q_i = 0$, en el nudo M, constituyen un sistema de tres ecuaciones que da lugar a los siguientes tipos de problemas:

- Determinación de caudales, conocidas las características de la red y las diferencias de cotas entre los depósitos; habrá por lo tanto, tres ecuaciones con tres incógnitas.

- Determinación de la diferencia de cotas entre los depósitos, conocidos los caudales y las características de la red; habrá por lo tanto dos ecuaciones con dos incógnitas, ya que la ecuación de los caudales es una identidad.

IX.6.- REDES RAMIFICADAS

Supongamos una red ramificada cualquiera como la indicada en la Fig IX.8, a la que aplicamos Bernoulli entre el punto A, correspondiente al nivel del depósito de alimentación, y los puntos terminales F, G, H, ..., M, de las distintas ramificaciones, obteniéndose una serie de ecuaciones, tantas como puntos terminales (8 en nuestro ejemplo), del tipo:

$$(z_A + 0 + 0) = (z_5 + \frac{p_5}{\gamma} + \frac{u_5^2}{2g}) + k_1 \cdot Q_1^2 (l_1 + \sum \xi_1) + k_2 \cdot Q_2^2 (l_2 + \sum \xi_2) + k_5 \cdot Q_5^2 (l_5 + \sum \xi_5)$$

$$z_A - (z_5 + \frac{p_5}{\gamma} + \frac{u_5^2}{2g}) = Q_1^2 (k_1 l_1 + k_1 \cdot \sum \xi_1) + Q_2^2 (k_2 l_2 + k_2 \cdot \sum \xi_2) + Q_5^2 (k_5 l_5 + k_5 \cdot \sum \xi_5)$$

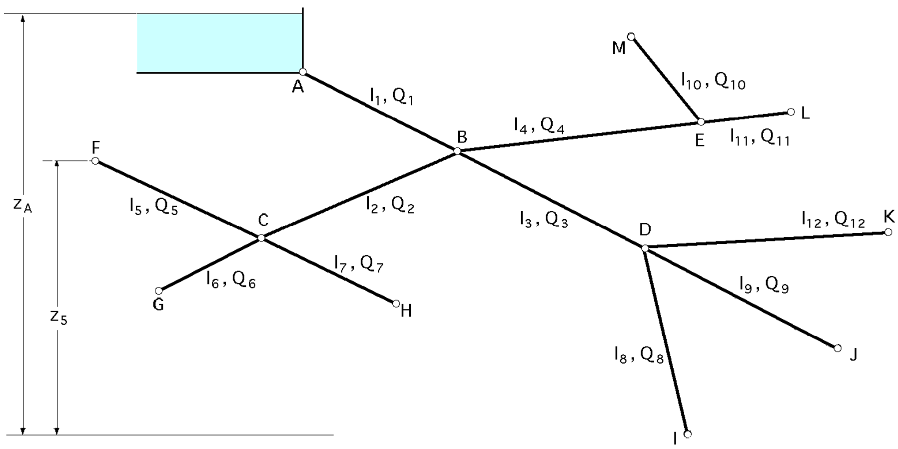

Fig IX.8.- Red ramificada

Además, en los nudos B, C, D, E, se cumple que $\sum Q_i = 0$, apareciendo tantas ecuaciones como nudos (4 en este ejemplo), en total 12 ecuaciones, con las que se pueden plantear los siguientes tipos de problemas:

a) Determinación de los caudales, conocidas las diferencias de carga y las características de la red; se tiene un sistema de 12 ecuaciones y 12 incógnitas.

b) Determinación de las diferencias de carga, conocidas las características de la red y los caudales; como $\sum Q_i = 0$*, son idénticas, se dispone de un sistema de 8 ecuaciones y 8 incógnitas.*

IX.7.- REDES MALLADAS

Este problema se presenta en las instalaciones de tuberías con el aspecto de redes entrelazadas entre sí; la solución del problema se fundamenta en las leyes de Kirchoff para corrientes eléctricas, por cuanto se tienen que cumplir las siguientes condiciones:

a) En un nodo cualquiera, la suma algebraica de los caudales entrantes y salientes, tiene que ser cero
b) En un circuito cerrado, la suma de las pérdidas de carga tiene que ser cero.

La ecuación de continuidad confirma la primera. Para la segunda se puede suponer que las pérdidas accidentales son despreciables frente a las continuas y que los términos cinéticos se anulan entre sí, por suponer que cada conducción es de diámetro constante; si no se conoce el sentido de la circulación, o no se intuye, éste se escogerá libremente.

Como ejemplo de cálculo supondremos la malla que se presenta en la Fig IX.9, obteniéndose:

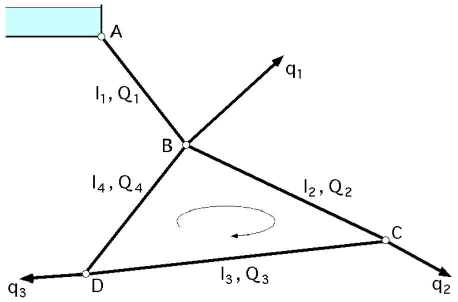

Fig IX.9.- Red mallada

Tramo (BC): $P_{BC} = (z_B + \frac{p_B}{\gamma}) - (z_C + \frac{p_C}{\gamma}) = Q_2^2\, k_2\, l_2$

Tramo (CD): $P_{CD} = (z_C + \frac{p_C}{\gamma}) - (z_D + \frac{p_D}{\gamma}) = Q_3^2\, k_3\, l_3$

Tramo (BD): $P_{BC} = (z_B + \frac{p_B}{\gamma}) - (z_D + \frac{p_D}{\gamma}) = Q_4^2\, k_4\, l_4$

y cambiando el signo a la ecuación del tramo (BD) y sumándolas miembro a miembro, se obtiene:

$$Q_2^2\, k_2 l_2 + Q_3^2\, k_3 l_3 - Q_4^2\, k_4 l_4 = 0$$

quedando así confirmada la segunda ley, según la cual, en un circuito cerrado la suma de las pérdidas de carga es nula.

La primera ley proporciona los siguientes caudales: $\begin{cases} Q_1 = q_1 + Q_2 + Q_4 \\ Q_2 = Q_3 + q_2 \\ Q_3 = Q_4 + q_3 \end{cases}$

Para el ejemplo con dos mallas de la Fig IX.10, sería:

$$5 \text{ nudos}: \begin{cases} Q_1 - q_1 - Q_2 - Q_5 = 0 \\ Q_2 - Q_3 - q_2 - Q_6 = 0 \\ Q_3 - Q_4 - q_3 = 0 \\ Q_4 + Q_5 - q_4 - Q_7 = 0 \\ Q_6 + Q_7 - q_5 = 0 \end{cases} \quad ; \quad 2 \text{ mallas}: \begin{cases} k_2\, Q_2^2\, l_2 + k_3\, Q_3^2\, l_3 + k_4\, Q_4^2\, l_4 - k_5\, Q_5^2\, l_5 = 0 \\ k_6\, Q_6^2\, l_6 - k_7\, Q_7^2\, l_7 - k_4\, Q_4^2\, l_4 - k_3\, Q_3^2\, l_3 = 0 \end{cases}$$

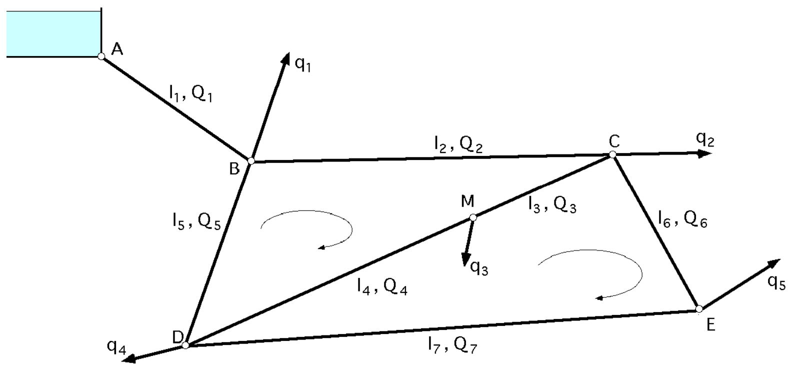

Fig IX.10

en las que los valores de Q son los caudales en cada tramo de tubería, mientras que los valores de q son los caudales en las diferentes salidas de la red.

Si hubiésemos aplicado la segunda ley a la malla (BCEDB), la ecuación que se obtendría sería combinación lineal de las dos últimas. Como resumen, se tiene un total de 7 ecuaciones que, según el tipo de datos de que se disponga, darán lugar a un tipo u otro de problema.

IX.8.- TUBERÍAS EN PARALELO

Método de los porcentajes.- Dado el sistema de 3 tuberías representado en la Fig IX.11, montadas en paralelo, a través de las cuales circula un fluido homogéneo, hay que determinar el caudal que circula por cada una de ellas; se tienen dos mallas, y en cada una de ellas se tiene que cumplir que la suma de las pérdidas de carga tiene que ser cero, es decir, en las tuberías montadas en parale-lo, la pérdida de carga tiene que ser la misma para cada tramo.

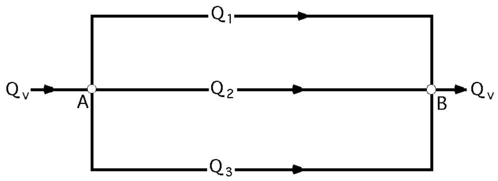

Fig IX.11

La expresión general de la pérdida de carga es:

$$P = \frac{\lambda u^2 L}{2 g d} = \frac{8 \lambda L}{g \pi^2 d^5} Q^2 = k Q^2$$

por lo que, en nuestro caso se tiene que la pérdida de carga entre A y B es la misma cualquiera sea el camino recorrido:

$$P_{AB} = k_1 Q_1^2 = k_2 Q_2^2 = k_3 Q_3^2$$

y en cada nudo:

$$\sum Q_i = 0 \;\; ; \;\; Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_v$$

Aplicando Bernoulli entre A y B se encuentra:

$$z_{A_i} + \frac{p_{A_i}}{\gamma} + \frac{u_{A_i}^2}{2 g} = z_{B_i} + \frac{p_{B_i}}{\gamma} + \frac{u_{B_i}^2}{2 g} + P_{AB}$$

y supuestas las tuberías de diámetro constante:

$$P_{AB} = \left(\frac{p_A}{\gamma} + z_A\right) - \left(\frac{p_B}{\gamma} + z_B\right) = \frac{\Delta p_{AB}}{\gamma} + (z_A - z_B) = k_1 Q_1^2 = k_2 Q_2^2 = k_3 Q_3^2$$

$$Q_1 = \sqrt{\frac{\frac{\Delta p_{AB}}{\gamma} + (z_A - z_B)}{k_1}} \;\; ; \;\; Q_2 = \sqrt{\frac{\frac{\Delta p_{AB}}{\gamma} + (z_A - z_B)}{k_2}} \;\; ; \;\; Q_3 = \sqrt{\frac{\frac{\Delta p_{AB}}{\gamma} + (z_A - z_B)}{k_3}}$$

$$Q_v = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \sqrt{\frac{\frac{\Delta p_{AB}}{\gamma} + (z_A - z_B)}{k_1}} + \sqrt{\frac{\frac{\Delta p_{AB}}{\gamma} + (z_A - z_B)}{k_2}} + \sqrt{\frac{\frac{\Delta p_{AB}}{\gamma} + (z_A - z_B)}{k_3}} = \sqrt{\frac{\frac{\Delta p_{AB}}{\gamma} + (z_A - z_B)}{k_v}}$$

y si además z_{A1} y z_{B1} son iguales:

$$P_{AB} = \frac{p_{A1}}{\gamma} - \frac{p_{B1}}{\gamma} = \frac{\Delta p_{AB}}{\gamma}$$

por lo que:

$$\Delta p_{AB} = \gamma k_1 Q_1^2 = \gamma k_2 Q_2^2 = \gamma k_3 Q_3^2 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = \sqrt{\frac{\Delta p_{AB}}{\gamma k_1}} \;\; ; \;\; Q_2 = \sqrt{\frac{\Delta p_{AB}}{\gamma k_2}} \;\; ; \;\; Q_3 = \sqrt{\frac{\Delta p_{AB}}{\gamma k_3}}$$

$$Q_v = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \sqrt{\frac{\Delta p_{AB}}{\gamma k_1}} + \sqrt{\frac{\Delta p_{AB}}{\gamma k_2}} + \sqrt{\frac{\Delta p_{AB}}{\gamma k_3}} = \sqrt{\frac{\Delta p_{AB}}{\gamma k_v}}$$

que simplificada queda en la forma:

$$\frac{1}{\sqrt{k_1}} + \frac{1}{\sqrt{k_2}} + \frac{1}{\sqrt{k_3}} = \frac{1}{\sqrt{k_v}}$$

siendo los valores de k correspondientes a cada tubería, de la forma:

$$k = \frac{8\, \gamma\, \lambda\, L_{AB}}{g\, \pi^2 d^5} = 0{,}08271 \frac{\lambda\, \gamma\, L_{AB}}{d^5}$$

Una vez determinado el valor de k se calcula el valor de la pérdida de carga P_{AB} introduciendo el caudal Q_v y a partir de aquí, la distribución del caudal en cada uno de los tramos.

En las redes de tuberías, el caudal que se tiene en una salida determinada puede proceder de diversos circuitos; los problemas de redes pueden ser muy complicados y requieren de una serie de ensayos en los que los circuitos se compensan de uno en uno, hasta que todas las condiciones que deba satisfacer la corriente fluida se cumplan.

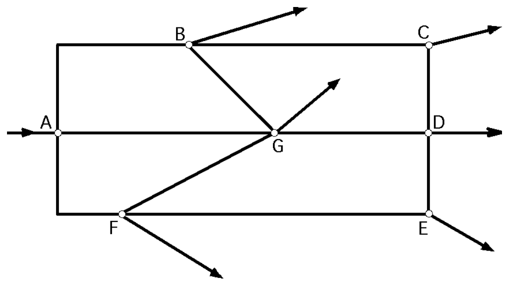

Fig IX.12

Como sabemos, estas condiciones son:

a) La suma algebraica de las caídas de presión alrededor de cada circuito debe ser nula. Esto significa que la caída de presión entre dos puntos cualesquiera del circuito, por ejemplo entre el A y el G de la Fig IX.12, a lo largo de la tubería (AG) o a lo largo de la (AFEDG) es la misma.

b) El caudal que llega a cada nudo debe ser igual al que sale de él, ecuación de continuidad

c) La fórmula de Darcy tiene que cumplirse en cada tubería, es decir, existe una relación entre la pérdida de energía y el caudal que debe satisfacerse en cada tubería

La expresión de Darcy para el cálculo de las pérdidas de carga se sustituye por la fórmula exponencial $J = r\, Q^n$.

Método iterativo de Hardy-Cross.- Como en la práctica los problemas de redes de tuberías no se pueden resolver analíticamente, se recurre a métodos de aproximaciones sucesivas, como el de Hardy-Cross, que consiste en suponer inicialmente en cada tubería un caudal determinado de forma que, en cada nudo, se satisfaga la ecuación de continuidad, y a continuación se calcula una corrección de caudales para cada circuito, de forma que estos queden muy compensados.

Las pérdidas accidentales se incluyen como longitudes equivalentes de tubería en cada tramo; con ayuda de la ecuación de la pérdida de carga $J = r\, Q^n$ en la que r y n se calculan para cada tubería, el método se aplica como sigue:

a) Se supondrá inicialmente una distribución de caudales que satisfagan la ecuación de continuidad en los nudos, y que después de un minucioso examen de la red se presuma que es la mejor.

b) Se calcula a continuación la pérdida de carga para cada tubería $J = r\,Q^n$, y acto seguido la pérdida de carga alrededor de cada circuito, es decir:

$$\sum J = \sum r\,Q^n$$

que debe satisfacer la condición de ser igual a cero, para cada circuito compensado.

c) Se calcula para cada circuito el término $\sum \left| n\,r\,Q_0^{n-1} \right|$ considerando a todos los términos que tengan esta forma, positivos.

d) Se establece para cada circuito un caudal correctivo ΔQ que va a servir para compensar, en más o en menos, la pérdida de carga en el circuito, para $\sum r\,Q^n = 0$:

$$\Delta Q = \frac{\sum r\,Q_0^n}{\sum \left| n\,r\,Q_0^{n-1} \right|}$$

e) Se calculan los caudales corregidos en cada tubería y se repite el proceso hasta conseguir la precisión deseada.

Se sabe que la solución es la correcta, cuando para cada circuito se satisfacen todas las condiciones.

El término corrector se obtiene como sigue:

Para cualquier tubería se pone un caudal Q de la forma $Q = Q_0 + \Delta Q$ en la que Q es el caudal corregido, Q_0 es el caudal supuesto y ΔQ es la corrección que hay que introducir.

Para una tubería cualquiera se tiene::

$$J = r\,Q^n = r\,(Q_0 + \Delta Q)^n = r\,(Q_0^n + n\,Q_0^{n-1}\,\Delta Q + \dots)$$

Si ΔQ es pequeño comparado con Q_0 todos los términos de la serie después del segundo se pueden despreciar, por lo que para un circuito se tiene:

$$\sum J = \sum r\,Q^n = \sum r\,Q_0^n + \Delta Q \sum n\,r\,Q_0^{n-1} = 0$$

en la que ΔQ sale del sumatorio porque es el mismo para todas las tuberías del circuito.

Despejando ΔQ se tiene el término corrector del caudal, ya indicado anteriormente:

$$\Delta Q = \frac{\sum r\,Q_0^n}{\sum n\,r\,Q_0^{n-1}}$$

Cuando ΔQ se aplica a un circuito, tiene el mismo sentido en todas las tuberías, es decir, se suma a los caudales que tienen dirección contraria a las agujas del reloj, y se resta a los de la misma dirección que las agujas del reloj; como ΔQ lleva consigo el signo, el denominador del término correctivo será la suma de los valores absolutos de los términos. Los valores de *r* están en el numerador y en el denominador y, en consecuencia, se pueden utilizar valores proporcionales a los valores reales de *r*, más pequeños; análogamente, las distribuciones de los caudales se pueden expresar como un porcentaje de los caudales reales; para encontrar una determinada pérdida de carga, se tienen que usar los valores reales de *r* y Q, después de que se haya encontrado la verdadera distribución de caudales.