XIII.- TEOREMA DEL IMPULSO

pfernandezdiez.es

XIII.1.- REACCIÓN DE UN FLUIDO EN MOVIMIENTO SOBRE UN CANAL GUÍA

El cálculo de la fuerza ejercida por un fluido en movimiento sobre el canal que forman los álabes de una bomba o turbina, se puede realizar aplicando el Teorema de la Cantidad de Movimiento, que dice:

El incremento geométrico diferencial de la cantidad de movimiento de un sistema material es igual al impulso elemental de la resultante de las acciones exteriores que actúan sobre dicho sistema.

De acuerdo con la Fig XIII.1, supondremos que el canal guía es el (ABCD) por el que va a circular el fluido en movimiento permanente, siendo $\vec{v}_1$ la velocidad en la sección Ω_1 y $\vec{v}_2$ la velocidad en la sección Ω_2 de dicho canal guía. El fluido es incompresible y las presiones en Ω_1 y Ω_2 tienen por valor p_1 y p_2 respectivamente, siendo G el peso de la vena líquida (ABCD).

Para estudiar el movimiento de la vena fluida (ABCD) como el de un cuerpo libre, la supondremos aislada del resto del fluido en movimiento, sustituyendo las masas fluidas, anterior a la sección Ω_1 y posterior a la sección Ω_2, por sus acciones sobre la vena (ABCD) a través de dichas secciones extremas.

Estas acciones son las presiones p_1 y p_2, la primera en el sentido del movimiento y la segunda en sentido contrario, aplicadas en Ω_1 y Ω_2 respectivamente; asimismo, el canal guía se puede sustituir por la resultante $\vec{R}_1$ de sus acciones sobre el fluido.

Designando por $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ a los vectores unitariuos dirigidos en el mismo sentido que las velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ respectivamente, la vena fluida (ABCD), como cuerpo libre, quedará sometida a las siguientes acciones, cuya resultante será igual a la de las fuerzas exteriores $\vec{F}$.

$$\begin{cases} \text{Gravedad.....................................} & \vec{G} \\ \text{Acción del canal sobre el fluido...} & \vec{R}_1 \\ \text{Acción de la presión sobre } \Omega_1\text{......} & \vec{n}_1\, \Omega_1\, p_1 \\ \text{Acción de la presión sobre } \Omega_2\text{......} & \vec{n}_2\, \Omega_2\, p_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \sum \vec{F} = \vec{G} - \vec{R} + \vec{n}_1\, \Omega_1\, p_1 - \vec{n}_2\, \Omega_2\, p_1$$

El cálculo de la reacción del fluido sobre el canal guía $\vec{R} = - \vec{R}_1$ se efectúa aplicando el teorema de la

Cantidad de Movimiento; por lo tanto, el impulso elemental de la resultante de las acciones exteriores que actúan sobre el sistema, masa fluida (ABCD), es:

$$\sum \vec{F}\, dt = \vec{G}\, dt + \vec{R}_1\, dt + \vec{n}_1\, \Omega_1\, p_1\, dt - \vec{n}_2\, \Omega_2\, p_2\, dt$$

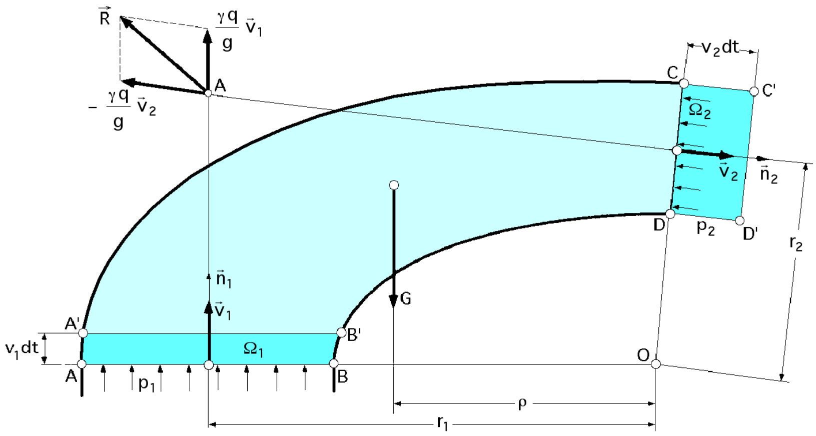

Fig XIII.1.- Canal guía

Si a continuación se supone que la masa fluida (ABCD) se desplaza en el tiempo dt a la posición (A'B'C'D'), se habrá producido una variación de su cantidad de movimiento. En efecto, como estamos en la hipótesis de movimiento permanente, para las masas de fluido contenidas entre las posiciones (ABCD) y (A'B'C'D'), la cantidad de movimiento no se modifica.

Sin embargo, quedan aún por comprobar las masas (ABA'B') y (CDC'D') en las que sus velocidades respectivas son $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ y cuyas cantidades de movimiento vamos a calcular:

El volumen (ABAB) es: $\Omega_1\, v_1\, dt$
El volumen (CDC'D') es: $\Omega_2\, v_2\, dt$

En la hipótesis de fluido incompresible, la ecuación de continuidad es $(\Omega_1\, v_1 = \Omega_2\, v_2)$ y, por lo tanto, los volúmenes (ABA'B') y (CDC'D') son iguales, de valor:

$$\Omega_1\, v_1\, dt = \Omega_2\, v_2\, dt = q\, dt$$

siendo q el caudal de fluido que circula por el canal guía.

La cantidad de movimiento inicial en la masa fluida es:

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_{A'B'CD} + \frac{\gamma\, q}{g}\, \vec{n}_1\, v_1\, dt$$

La cantidad de movimiento final en la masa fluida es:

$$\vec{M}_2 = \vec{M}_{A'B'CD} + \frac{\gamma\, q}{g}\, \vec{n}_2\, v_2\, dt$$

La variación de la cantidad de movimiento en el tiempo dt, entre las posiciones infinitamente próximas (ABCD) y (A'B'C'D') es:

$$\vec{M}_2 - \vec{M}_1 = \frac{\gamma\, q}{g}\, (\vec{n}_2\, v_2 - \vec{n}_1\, v_1)\, dt$$

Aplicando el teorema de la Cantidad de Movimiento, se tiene:

$$\frac{\gamma q}{g} (\vec{n}_2 v_2 - \vec{n}_1 v_1) dt = \vec{G} dt + \vec{R}_1 dt + \vec{n}_1 \Omega_1 p_1 dt - \vec{n}_2 \Omega_2 p_2 dt$$

de la que se deduce la expresión de la reacción $\vec{R}_1$ de las paredes del canal sobre la vena fluida.

$$\vec{R}_1 = \frac{\gamma q}{g} (\vec{n}_2 v_2 - \vec{n}_1 v_1) - \vec{G} + \vec{n}_2 \Omega_2 p_2 - \vec{n}_1 \Omega_1 p_1$$

y de acuerdo con el Principio de Acción y Reacción, el valor de la acción del fluido $\vec{R}_1$ sobre las paredes del canal guía se obtiene teniendo en cuenta que $\vec{R} = -\vec{R}_1$, en la forma:

$$\vec{R} = \frac{\gamma q}{g} (\vec{n}_1 v_1 - \vec{n}_2 v_2) + \vec{G} + \vec{n}_1 \Omega_1 p_1 - \vec{n}_2 \Omega_2 p_2$$

Si llamamos X e Y a las componentes de $\vec{R}_1$ respecto a los ejes cartesianos de referencia, y:

$$\begin{cases} \alpha_1 \text{ al ángulo que forman con la dirección } (xx') \text{ los vectores } \vec{v}_1 \text{ y } (\vec{n}_1 \Omega_1 p_1) \\ \alpha_2 \text{ al ángulo que forman con la dirección } (xx') \text{ los vectores } \vec{v}_2 \text{ y } (\vec{n}_2 \Omega_2 p_2) \\ \alpha_3 \text{ al ángulo que forma } \vec{G} \text{ con la dirección } (xx') \end{cases}$$

se tiene: $$\begin{cases} X = \dfrac{\gamma q}{g} (v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2) + G \cos \alpha_3 + \Omega_1 p_1 \cos \alpha_1 - \Omega_2 p_2 \cos \alpha_2 \\ Y = \dfrac{\gamma q}{g} (v_1 \operatorname{sen} \alpha_1 - v_2 \operatorname{sen} \alpha_2) + G \operatorname{sen} \alpha_3 + \Omega_1 p_1 \operatorname{sen} \alpha_1 - \Omega_2 p_2 \operatorname{sen} \alpha_2 \end{cases}$$

y despreciando el peso de la vena, y no teniendo en cuenta las presiones, se llega a:

$$\vec{R} = \frac{\gamma q}{g} (\vec{n}_1 v_1 - \vec{n}_2 v_2) = \frac{\gamma q}{g} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \Rightarrow \begin{cases} X = \dfrac{\gamma q}{g} (v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2) \\ Y = \dfrac{\gamma q}{g} (v_1 \operatorname{sen} \alpha_1 - v_2 \operatorname{sen} \alpha_2) \end{cases}$$

La construcción gráfica de la reacción es la siguiente:

Sobre el punto de intersección de las direcciones $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, punto A de la Fig XIII.1, se construye la diferencia indicada por la fórmula que da el valor de $\vec{R}$, obteniéndose su módulo, dirección y sentido, en la hipótesis de despreciar el peso $\vec{G}$ y las presiones p_1 y p_2.

XIII.2.- MOMENTO CON RELACIÓN A UN PUNTO DE LA ACCIÓN $\vec{R}$

Si se quiere calcular el momento con relación a un punto de la acción, ejercida por el fluido sobre su canal guía, aplicaremos el teorema del Momento Cinético que dice:

El incremento diferencial experimentado por el momento cinético de un sistema móvil respecto a un punto fijo O, es igual al momento resultante respecto al mismo punto O, de los impulsos elementales de las fuerzas exteriores que solicitan al sistema.

Utilizando la misma notación que para el cálculo de $\vec{R}$ y de acuerdo con la Fig XIII.1 se tiene:

Momento cinético inicial:

$$\vec{\mu}_1 = \vec{\mu}_{A'B'CD} + \frac{\gamma q}{g} \vec{n}_1 v_1 \, dt \wedge \vec{r}_1$$

Momento cinético final:

$$\vec{\mu}_2 = \vec{\mu}_{A'B'CD} + \frac{\gamma q}{g} \vec{n}_2\, v_2\, dt \wedge \vec{r}_2$$

siendo la variación experimentada por el momento cinético:

$$\vec{\mu}_2 - \vec{\mu}_1 = \frac{\gamma q}{g} (\vec{n}_2\, v_2 \wedge \vec{r}_2 - \vec{n}_1\, v_1 \wedge \vec{r}_1)\, dt$$

El momento resultante de los impulsos que recibe la vena es:

$$\vec{G}\, dt \wedge \vec{\rho} + \vec{R}_1\, dt \wedge \vec{\rho}_1 + \vec{n}_1\, \Omega_1\, p_1\, dt \wedge \vec{r}_1 - \vec{n}_2\, \Omega_2\, p_2\, dt \wedge \vec{r}_2$$

Haciendo $\vec{\mu}' = \vec{R}_1 \wedge \vec{r}_1$, que es el momento de las acciones de las paredes respecto a O y aplicando el momento citado, se obtiene:

$$\frac{\gamma q}{g} (\vec{n}_2\, v_2 \wedge \vec{r}_2 - \vec{n}_1\, v_1 \wedge \vec{r}_1)\, dt = \vec{G}\, dt \wedge \vec{\rho} + \vec{\mu}'\, dt + \vec{n}_1\, \Omega_1\, p_1\, dt \wedge \vec{r}_1 - \vec{n}_2\, \Omega_2\, p_2\, dt \wedge \vec{r}_2$$

Dividiéndola por *dt*:

$$\frac{\gamma q}{g} (\vec{n}_2\, v_2 \wedge \vec{r}_2 - \vec{n}_1\, v_1 \wedge \vec{r}_1) = \vec{G} \wedge \vec{\rho} + \vec{\mu}' + \vec{n}_1\, \Omega_1\, p_1 \wedge \vec{r}_1 - \vec{n}_2\, \Omega_2\, p_2 \wedge \vec{r}_2$$

y como $\vec{\mu} = -\vec{\mu}'$ es el momento resultante respecto a O de las reacciones del fluido sobre el canal guía, se tiene finalmente:

$$\vec{\mu} = \frac{\gamma q}{g} (\vec{n}_1\, v_1 \wedge \vec{r}_1 - \vec{n}_2\, v_2 \wedge \vec{r}_2) + \vec{G} \wedge \vec{\rho} + \vec{n}_1\, \Omega_1\, p_1 \wedge \vec{r}_1 - \vec{n}_2\, \Omega_2\, p_2 \wedge \vec{r}_2$$

XIII.3.- TEOREMAS DE EULER APLICADOS A LAS TURBOMAQUINAS

Primer teorema de Euler.- Sabemos que la reacción de una vena fluida sobre el canal que la conduce es de la forma:

$$\vec{R} = \frac{\gamma q}{g} (\vec{n}_0\, v_0 - \vec{n}_1\, v_1) + \vec{G} + \vec{n}_0\, \Omega_0\, p_0 - \vec{n}_1\, \Omega_1\, p_1$$

y llamando: $\begin{cases} \alpha_0 \text{ y } \alpha_1 \text{ a los ángulos que forman } \vec{v}_0 \text{ y } \vec{v}_1 \text{ con el eje } Ox \\ \beta_0 \text{ y } \beta_1 \text{ a los ángulos que forman } \vec{v}_0 \text{ y } \vec{v}_1 \text{ con el eje } Oy \\ \gamma_0 \text{ y } \gamma_1 \text{ a los ángulos que forman } \vec{v}_0 \text{ y } \vec{v}_1 \text{ con el eje } Oz \end{cases}$, y considerando que: $\begin{cases} \Omega_0\, p_0 \rangle_x \\ \Omega_0\, p_0 \rangle_y \\ \Omega_0\, p_0 \rangle_z \end{cases}$

son las componentes de $(\vec{n}_0,\ \Omega_0,\ p_0)$ sobre los ejes Ox, Oy y Oz, las componentes X, Y, Z del vector $\vec{R}$ tienen por expresión, (despreciando la gravedad por ser su efecto mucho menor que el correspondiente a la velocidad y presión), las siguientes:

$$\begin{cases} X = \dfrac{\gamma q}{g} (v_0 \cos \alpha_0 - v_1 \cos \alpha_1) + \Omega_0\, p_0\rangle_x - \Omega_1\, p_1\rangle_x \\ Y = \dfrac{\gamma q}{g} (v_0 \cos \beta_0 - v_1 \cos \beta_1) + \Omega_0\, p_0\rangle_y - \Omega_1\, p_1\rangle_y \\ Z = \dfrac{\gamma q}{g} (v_0 \cos \gamma_0 - v_1 \cos \gamma_1) + \Omega_0\, p_0\rangle_z - \Omega_1\, p_1\rangle_Z \end{cases}$$

igualdades que constituyen el Primer Teorema de Euler.

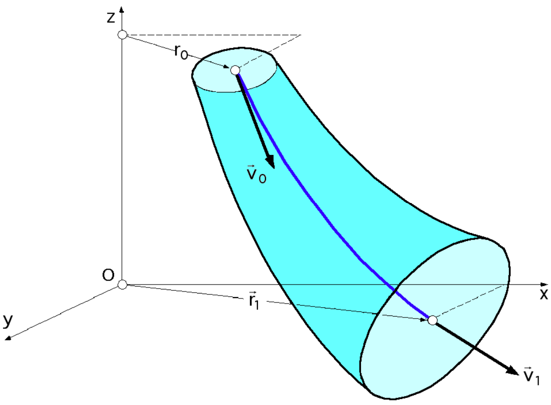

Fig XIII.2

Cada una de estas expresiones consta de dos términos:

- El sumando $\frac{\gamma q}{g} (\vec{n}_0\, v_0 - \vec{n}_1\, v_1)$ *se corresponde con la acción dinámica debida a la variación de la Cantidad de Movimiento de la vena líquida, entre la entrada y salida de la rueda, Fig XIII.2.*

- El sumando $\vec{n}_0\, \Omega_0\, p_0 - \vec{n}_1\, \Omega_1\, p_1$ *se corresponde con la acción estática resultante de las distintas presiones existen-tes en las mismas secciones. Ambas ecuaciones son muy interesantes para la determinación del empuje axial en las turbinas de reacción.*

Segundo teorema de Euler.- El momento de la reacción de una vena sobre el canal guía respecto a un punto O, viene dado por la expresión:

$$\vec{\mu} = \frac{\gamma q}{g} (\vec{n}_0\, v_0 \wedge \vec{\rho}_0 - \vec{n}_1\, v_1 \wedge \vec{\rho}_1) + \vec{n}_0\, \Omega_0\, p_0 \wedge \vec{\rho}_0 - \vec{n}_1\, \Omega_1\, p_1 \wedge \vec{\rho}_1 + \vec{G} \wedge \vec{\rho}_0$$

Determinaremos a continuación las componentes de este vector sobre los ejes coordenados, que tienen su origen en el punto O, respecto al cual se calcula el momento $\vec{\mu}$

De acuerdo con la Fig XIII.3, se tiene que $\vec{p}_0 = \overline{OA}$; $\vec{p}_1 = \overline{OB}$, y las velocidades se descomponen según las direcciones axial, tangencial y radial; también se indican las componentes meridianas $\vec{v}_{0m}$ y $\vec{v}_{1m}$.

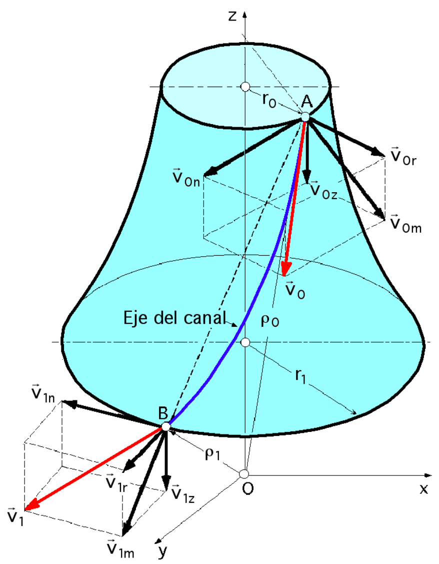

Fig XIII.3.- Canal guía en rotación

En lo que sigue consideraremos que el momento de un vector respecto a un eje es la proyección respecto a dicho eje del momento del vector respecto a un punto cualquiera de aquel.

De acuerdo con ésto se tiene:

Momento de $\vec{v}_0$ respecto de Oz = $(\vec{n}_0\, v_0 \wedge \vec{\rho}_0)$ es la proyección de $(\vec{n}_0\, v_0 \wedge \vec{\rho}_0)$ sobre Oz

Además:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{0n} + \vec{v}_{0r} + \vec{v}_{0z} = \vec{v}_{0n} + \vec{v}_{0m}$$

El momento de $\vec{v}_0$ respecto a Oz es el momento de $\vec{v}_{0n}$ respecto a Oz, ya que el momento de $\vec{v}_{0m}$ respecto a Oz es nulo, por cortar $\vec{v}_{0m}$ a Oz.

De todo ello se deduce que: $\begin{cases} (\vec{n}_0\, v_0 \wedge \vec{\rho}_0)_z = v_{0n}\, r_0\, \vec{k}\ ,\ \textit{siendo su módulo: } v_{0n}\, r_0 \\ (\vec{n}_1\, v_1 \wedge \vec{\rho}_1)_z = v_{1n}\, r_1\, \vec{k}\ ,\ \textit{siendo su módulo: } v_{1n}\, r_1 \end{cases}$

Si llamamos a_0 y a_1 a los módulos de las componentes tangenciales $\vec{v}_{0n}$ y $\vec{v}_{1n}$, respectivamente, y M_{0x}, M_{0y} y M_{0z} a las proyecciones sobre Ox, Oy, y Oz, del momento resultante de las presiones estáticas

$$\text{se tiene: } \begin{cases} M_{0x} = (\vec{n}_0\, \Omega_0\, p_0 \wedge \vec{\rho}_0 - \vec{n}_1\, \Omega_1\, p_1 \wedge \vec{\rho}_1)_x \\ M_{0y} = (\vec{n}_0\, \Omega_0\, p_0 \wedge \vec{\rho}_0 - \vec{n}_1\, \Omega_1\, p_1 \wedge \vec{\rho}_1)_y \\ M_{0z} = (\vec{n}_0\, \Omega_0\, p_0 \wedge \vec{\rho}_0 - \vec{n}_1\, \Omega_1\, p_1 \wedge \vec{\rho}_1)_z \end{cases}$$

y despreciando el peso $\vec{G}$ se puede poner:

$$\begin{cases} \mu_x = \mathrm{L} = \dfrac{\gamma\, q}{g}\,(r'_0\, b_0 - r'_1\, b_1) + M_{0x} \\ \mu_y = \mathrm{M} = \dfrac{\gamma\, q}{g}\,(r''_0\, c_0 - r''_1\, c_1) + M_{0y} \\ \mu_z = \mathrm{N} = \dfrac{\gamma\, q}{g}\,(r_0\, a_0 - r_1\, a_1) + M_{0z} \end{cases}$$

$$\text{en donde } \begin{cases} r_0,\ r'_0 \text{ y } r''_0, \textit{ son las distancias del punto A a los ejes Ox, Oy, y Oz} \\ r_1,\ r'_1 \text{ y } r''_1, \textit{ son las distancias del punto B a los mismos ejes} \end{cases}$$

En la práctica, los términos M_{0x}, M_{0y} y M_{0z} de estas expresiones son despreciables o nulos, por ser las presiones simétricas, o estar situadas en planos que cortan al eje.

Si el canal guía no puede girar más que alrededor del eje Oz, la expresión del par motor teórico, considerando, $a_0 = v_{0n}$ y $a_1 = v_{1n}$, componentes giratorias, proporciona el Segundo Teorema de Euler aplicado a las turbomáquinas:

$$C_{m(\text{ teórico })} = \mathrm{N} = \frac{\gamma\, q}{g}\,(r_0\, a_0 - r_1\, a_1) = \left| \begin{matrix} a_0 = v_{0n} \\ a_1 = v_{1n} \end{matrix} \right| = \frac{\gamma\, q}{g}\,(r_0\, v_{0n} - r_1\, v_{1n})$$

que sirve de base a la obtención de la ecuación general de las turbinas hidráulicas y bombas centrífugas.